数理解析 I 要綱 #2

2005–4–12　　河野

この章の残りの部分では数理解析を学ぶ準備として,「論理」（数学的な意味での）について触れておく。数学的と括弧を付けた理由は数学の論理は一般社会で使われている論理よりもある意味では厳密だがその全てを定式化できているわけではないという点にある。一般の社会で使われている論理にはいろいろなものがある。「正しい」「間違っている」という以外にも,「多分」「きっと」「べきである」等々色々なものが考えられる。数学的に定式化できているのはその「単純」な場合だけである。例えば,「風が吹いたのに雨が降った」と「風が吹いてかつ雨が降った」を区別できない（しない)。付け加えておくと，様相論理，ファジー論理等そのような拡張の試みもなされている。我々は以下で「論理」を取り扱うが一般の論理と区別したい時には特に**数理論理** (*mathematical logic*) または**記号論理** (*symbolic logic*) と呼ぶ。

「論理」のみを取り出して議論するのは，畳の上の水泳練習というきらいがないではない。数理解析 (線形解析も含めて) の講義全体を通じてきちんと身につけるというのが本来であり理想であろう。しかし，1 つは講義で十分にふれることが出来ない事が予想される，2 つには高校時代「論理」的な訓練を殆んどされていないという状況だと思われる—以上の事から取り上げる事にした。

0.2　命題と論理

真 (T)，または偽 (F) が定まっている文章を**命題** (*proposition*) という。

例 0.1 次の例で P_6,P_9,P_{11} は命題ではないが (P_9 は正しい命題？)，それ以外は命題である。P_{11} は自己矛盾命題 (self–contradictory proposition) と呼ばれる。

P_1: $1 = 1$
P_2: $1 \geqq 1$
P_3: $1 \neq 1$
P_4: 2^{2004} は素数である。
P_5: 12345 は 3 で割り切れる。
P_6: 12345 は大きな数である。
P_7: 微分可能な関数は連続である。
P_8: 連続な関数は微分可能である。
P_9: 数学は難しい。
P_{10}: $n \geqq 3$ の自然数に対し $x^n + y^n = z^n$ を満たす自然数 x, y, z は存在しない。
P_{11}: p と $p + 2$ が共に素数のときこれらを双子素数と呼ぶ。双子素数は無限個存在する。
P_{12}: 「クレタ人は嘘つきである」とクレタ人であるエピメニデスが言った。

命題が幾つかあった時それを組合わせて新しい命題を作る方法がある。‘**かつ**’(**論理積**,disjunction, logical product)，‘**または**’(**論理和**,conjunction, logical sum)，‘$\cdots$ **でない**’(**否定**,negation)，‘**ならば**’ などがそれである。次の記号を使用する。

- $P \vee Q$:　P または Q である[(1)]
- $P \wedge Q$:　P かつ Q である

このプリントも含め講義関連のプリントは http://math.cs.kitami-it.ac.jp/~kouno/kougi.html においてある。
(1) 日常では “一方のみが正しい時正しい” という使われ方をする時がある。「ランチにはコーヒーまたは紅茶が付いております。」「両方下さい。」数理論理学でこれに対応するものとして排他的論理和がある。

- $\neg P$:　P でない

- $P \Longrightarrow Q$:　P ならば Q である。

それぞれの記号の意味はほとんど明らかであろう。しかし，きちんと議論するためには次の様な真理表を使って定義する。

P	$\neg P$
T	F
F	T

P	Q	$P \wedge Q$	$P \vee Q$	$P \Longrightarrow Q$
T	T	T	T	T
T	F	F	T	F
F	T	F	T	T
F	F	F	F	T

ここで 2 つの注意：1 つ目は「仮定が正しくないときの $P \Longrightarrow Q$ の真偽」である。日常の論理では「仮定部分 (P) が正しければ結論部分 (Q) が正しい」という使われ方はするが，仮定部分が偽のときの議論はあまりされない。数理論理では確定させておく必要があるが，何故この様に決めるのだろう。次の命題は正しいであろうか。

$$x = 1 \text{ ならば } x^2 = 1$$

正しい命題と考えるのが当然と思うかもしれない。しかし仮定が偽で結論が偽のとき命題が偽と定義すると，$x = 2$ のとき，仮定，結論ともに偽となりこの命題は偽になる。仮定が偽結論が真のとき偽と定義すると，$x = -1$ のとき，仮定が偽，結論が真となり，この命題は偽となる。以上の様な事から「ならば」の真偽は前述の様に定義する事とする。

2 つ目は，我々がよく使っている記号 ‘ , ’ (comma) には注意が必要である。例えば次の様な使い方をする。

$$x^2 - 1 = 0 \text{ を解いて } x = -1, 1$$

$$x \text{ は } x > 0, x^2 = 1 \text{ を満たすので } x = 1$$

最初の comma は or（または）で 2 番目のは and（かつ）である。どちらにも使えて便利であるが，混同しがちになるので注意する必要がある。

$(P \Longrightarrow Q) \wedge (Q \Longrightarrow P)$ を $P \Longleftrightarrow Q$ と表す。真理表を書いてみると分るが $(P \Longleftrightarrow Q)$ は P と Q の真理値が等しい時，その時のみ真である。

P	Q	$P \Longleftrightarrow Q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

$X \Longleftrightarrow Y$ が常に真であるとき，X と Y は**同値**であるといい，$X \equiv Y$ と表す。定義からすぐ分るように X の真理表と Y の真理表が同じならば 2 つの論理式は同値である。

例 0.2

(1) $\neg(\neg P) \equiv P$(2 重否定の法則)

(2) $(P \Longrightarrow Q) \equiv (\neg P \vee Q)$
(3) $\neg(P \wedge Q) \equiv (\neg P) \vee (\neg Q)$(de Morgan の法則)
(4) $\neg(P \vee Q) \equiv (\neg P) \wedge (\neg Q)$(de Morgan の法則)
(5) (2) と (4) から $P \Longrightarrow Q$ の否定は $P \wedge \neg Q$ が分かる。
(6) **対偶**　$(P \Longrightarrow Q) \equiv (\neg Q \Longrightarrow \neg P)$ である。これは元の命題と対偶命題が同値である事を示している。

演習問題 0.1　次の命題 (?) の否定命題をつくれ，また対偶命題をつくれ。
(1) テストが終ったならば退席してもよい。
(2) 数理解析 I は勉強しないと合格しない。
(3) 彼は怒られないと勉強しない。

演習問題 0.2　例 0.2 を真理表を書いて証明せよ。

0.3　任意と存在

次に「任意」と「存在」について取上げる。数学の命題ではこの「任意」と「存在」が重要な役割を果たしている。『実数から実数への写像 $y = f(x)$ が $x = a$ で極大である。』という命題を考えよう。これはきちんと書くと『ある正の実数 δ が存在して，任意の実数 x に対し $0 < |x - a| < \delta$ ならば $f(x) < f(a)$ である。』という事を意味している。テキスト 2 ページの問 1 でも，厳密に言うとそれらの前には任意の実数 $x_1, \ldots, x_n, x, y, z$ 等が省略されていて，それを付け加えなければ正確な命題とは言えない。このように数学的な「何か」を表現しようとすると「任意」「存在」は色々な所に顔を出す。

『x は 3 以上である。』という叙述のように不定元を含んでいるものは真偽が定まらないので命題ではないが(2)，x に具体的なものが代入されて得られる叙述は命題である。このようなものを命題関数といい，不定元が x である事を強調して $P(x)$ のように表す。

$P(x)$ が命題関数の時,「集合 M の任意の元 x に対し $P(x)$ が成立する。」という叙述は命題になる。たとえば 「$P(x)$: x は 3 以上」とするとき『任意の実数 x に対し $P(x)$ が成立する』というのは命題である (今の場合正しくない命題)。また,「元 x が集合 M に存在して，命題 $P(x)$ が成立する。」という叙述も命題になる。『ある実数 x が存在して $P(x)$ が成立する』は命題である (今の場合正しい命題)。

「任意」「存在」を含んだ命題の否定命題を作るときは注意が必要である。『集合 M の任意の元 x に対し命題 $P(x)$ が成立する。』の否定は『集合 M の任意の元 x に対し命題 $P(x)$ が成立しない。』ではない。$P(x)$ が成立しない元が 1 つでもあればよいので『元 x が集合 M に存在して，命題 $P(x)$ が成立しない。』である。逆に『元 x が集合 M に存在して，命題 $P(x)$ が成立する。』の否定は『集合 M の任意の元 x に対し $P(x)$ が成立しない。』である。つまり否定命題を作る時は存在を任意に，任意を存在に変え命題を否定すればよいと言う事になる。

不定元が 2 つ (またはそれ以上) あるような命題関数を考える事ができる。例えば「$P(x, y)$: x は y より大きい」とするとき,『任意の実数 x に対し 実数 y が存在して $P(x, y)$ が成立する。』は命題である。同様に『ある実数 x が存在して任意の実数 y に対し $P(x, y)$ が成立する。』も命題で

(2)前に $x = 1$ ならば $x^2 = 1$ が命題の様に書いたが，厳密にはこれは間違いであり，正確には『任意の実数 (状況により整数等の場合がある) に対し，$x = 1$ ならば $x^2 = 1$』と言わなくてはならなかった。

ある。これの否定命題はそれぞれ『ある実数 x が存在して任意の実数 y に対し $P(x,y)$ が成立しない。』『任意の実数 x に対しある実数 y が存在して $P(x,y)$ が成立しない。』である。

極限の数学的な定義は次のようである。『$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$』とは『任意の正の実数 ε に対しある正の実数 δ が存在して任意の実数 x に対し $|x-a| < \delta$ ならば $|f(x)-f(a)| < \varepsilon$ が成立する。』ことと定義する。また『$\lim_{n\to\infty} a_n = a$』とは『任意の正の実数 ε に対しある自然数 N が存在して任意の自然数 n に対し $n > N$ ならば $|a_n - a| < \varepsilon$ が成立する。』ことと定義する。

演習問題 0.3 『$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$』の否定命題を作れ。また『$\lim_{n\to\infty} a_n = a$』の否定命題を作れ。

演習問題 0.4 I で定義された関数 $y=f(x)$ を考える。$y=f(x)$ が $x=a$ で連続とは『$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$』と定義される。$y=f(x)$ が I で連続である (単に $y=f(x)$ は連続関数ともいう) とは，I のすべての点 a で『$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$』が成立する事と定義される。次の命題を「任意・存在」を用いてきちんと書き直せ。

(1) $y=f(x)$ が連続関数である。

(2) $y=f(x)$ が連続関数でない。

(3) 閉区間 I で定義された連続関数 $y=f(x)$ は最大値をとる (最大値定理)。

(4) 区間 $[a,b]$ で定義された連続関数 $y=f(x)$ が $f(a)<0<f(b)$ を満たせば $f(c)=0$ となる点 c $(a<c<b)$ が存在する (中間値の定理)。

最期に付け足しとして論理記号を導入しておこう。興味ある人は読んでください (小さい文字で書いておく)。

‘任意’ に対し ‘$\forall$’ という記号を導入して，

$$\forall x \in M, P(x) \qquad \text{または} \qquad \forall x (x \in M \Longrightarrow P(x))$$

と表す ($\forall$ を全称記号という)。これを ‘存在’ に対し $\exists$ という記号を導入して，

$$\exists x \in M; P(x) \qquad \text{または} \qquad \exists x (x \in M \wedge P(x))$$

と表す。

この記号はなかなか便利であるし論理構造を明確にする。例えば，否定命題を作ってみよう。以前考えた事を論理記号で書くと

$$\neg(\forall x \in M, P(x)) \Longleftrightarrow \exists x \in M;\ \neg P(x)。$$

同様に存在については

$$\neg(\exists x \in M; P(x)) \Longleftrightarrow \forall x \in M, \neg P(x)$$

となる (de Morgan の法則)。つまり否定命題を作る時は存在を任意に，任意を存在に変え命題を否定すればよいと言う事になる。

例として２人でやるゲームの必勝法の問題を考える。例えば,「A,B ２人がいて各自勝手な自然数を順に言って勝負を決める」ゲームを考える。A は k_1 と言い，B は k_2 と言ったとする。勝負を決めるルールはあらかじめ $\boldsymbol{N}\times\boldsymbol{N}$ の部分集合 X が決まっていて，$(k_1,k_2)\in X$ なら A の勝ち，$(k_1,k_2)\notin X$ なら B の勝ちとする。例えば，$X=\{(m,n)\in\boldsymbol{N}\times\boldsymbol{N} \mid m\geq n\}$ とすると「大きい数を言った方の勝ち」というルールになる (正確には先手は小さくない数をいえば勝ち)。

この時どんなルール X に対しても,「両方に必勝法がある」ことは起らないが，A か B のどちらかに必勝法はあるのだろうか。一見分りにくいが必勝法ということを論理記号で書いてみよう。

「A に必勝法がある」という命題を P,「B に必勝法がある」という命題を Q とする。この時，論理記号を使うと，

$$P: \qquad \exists k_1 \in \boldsymbol{N}, \forall k_2 \in \boldsymbol{N}; (k_1,k_2)\in X$$

$$Q: \qquad \forall k_1 \in \boldsymbol{N}, \exists k_2 \in \boldsymbol{N}; (k_1,k_2)\notin X$$

となる。つまり，$\neg P = Q$ である事はすぐ分るので P または Q，つまりどちらかに必勝法がある。