数理解析 I 要綱 #10

2005–6–6 河野

2.6 高階偏導関数とテーラーの定理

関数 $z = f(x,y)$ の導関数 f_x, f_y が偏微分可能のとき更に導関数を考える事ができる。f_x の x に関する導関数 $(f_x)_x$, y に関する導関数 $(f_x)_y$ を f_{xx}, f_{xy} と書く。また f_y の導関数も同様に定義できる。これらを 2 階の偏導関数と呼ぶ。$\dfrac{\partial z}{\partial x}$ の表し方で言うと，$\dfrac{\partial z}{\partial x}$ を x で微分した関数は $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)$ から $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ と書く。同様に $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ を y で微分した関数は $\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)$ から $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ と書く。$\dfrac{\partial z}{\partial y}$ を x で微分した関数は $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)$ から $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ 表す。$\dfrac{\partial z}{\partial y}$ を y で微分した関数は $\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)$ から $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ と表す。3 階以上の偏導関数も同様に定義される。

f_{xy} は f を最初は x で微分し次に y で微分したものである。f_{yx} は f を最初は y で微分し次に x で微分したものであり，この 2 つは一般に違うものである。しかしある条件の元では一致する。

定理 2.19 [**シュワルツの定理**] 点 (a,b) の近傍で，f_x, f_y, f_{xy} が存在して，f_{xy} が (a,b) で連続ならば，f_{yx} も存在して $f_{xy}(a,b) = f_{yx}(a,b)$ が成立する。

系 $f(x,y)$ が C^2 級 (2 階の偏導関数が存在して連続) ならば $f_{xy} = f_{yx}$ である。

関数 $f(x,y)$ が C^n 級 (n 階までの導関数が存在して連続) であれば n 階までの導関数は x, y で微分した回数が同じであればその順序によらず決る。

多変数のテーラーの定理を述べるために次の記号を導入する。この記号を使用しないと，定理を書き下すだけで結構な手間である。

定義 2.20 $\dfrac{\partial}{\partial x}$ を独立したものとして扱い $\dfrac{\partial}{\partial x} f$ は $\dfrac{\partial}{\partial x}$ が f に作用していると見なす。このとき形式的に $D = h\dfrac{\partial}{\partial x} + k\dfrac{\partial}{\partial y}$ と定義し，Df を $Df = h\dfrac{\partial}{\partial x} f + k\dfrac{\partial}{\partial y} f$ と定義する。また $D^2 = \left(h\dfrac{\partial}{\partial x} + k\dfrac{\partial}{\partial y}\right)^2 = h^2\dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + 2hk\dfrac{\partial^2}{\partial x \partial y} + k^2\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$ と考える。一般に

$$D^n = \left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^n = \sum_{r=0}^{n} {}_nC_r h^{n-r} k^r \frac{\partial^n}{\partial x^{n-r} \partial y^r}$$

と見る。

定理 2.21 [**テーラーの定理**]

$$\begin{aligned} f(x+h, y+k) &= f(x,y) + Df(x,y) + \cdots + \frac{1}{r!} D^r f(x,y) + \cdots + \frac{1}{(n-1)!} D^{n-1} f(x,y) \\ &\quad + \frac{1}{n!} D^n f(x + \theta h, +y + \theta k) \end{aligned}$$

となる θ $(0 < \theta < 1)$ が存在する。

このプリントも含め講義関連のプリントは http://math.cs.kitami-it.ac.jp/~kouno/kougi.html においてある。

$z = f(x,y) = x^2 e^y$ に対し $(x,y) = (1,1)$ でテーラー定理を用いて展開して見よう。1 変数の定理の場合と同様に，定理の $\dfrac{1}{n!}D^n f(x+\theta h, +y+\theta k)$ の項を剰余項といい R_n で表す。ここでは剰余項を無視した近似を考える。最初に $n=2$ の場合を考える。$\dfrac{\partial f}{\partial x} = 2xe^y$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = x^2 e^y$ なので $\dfrac{\partial f}{\partial x}(1,1) = 2e$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = e$ である。よって

$$f(1+h, 1+k) \cong e + 2eh + ek$$

である。これは関数 f を $(1,1)$ の周りで h,k に関する 1 次式で近似している式である。

$n=3$ の場合は

$$f(1+h, 1+k) \cong e + 2eh + ek + eh^2 + 2ehk + \frac{1}{2}ek^2$$

この式は 2 次式による近似になっている。n を大きくしていくと高い次数の式による近似になり，一般に近似が良くなるのは 1 変数の場合と同様である。

1 変数の場合と同様に 2 変数でも級数展開が考えられるがこの講義では取扱わない。

演習問題 2.12　次の関数を (a,b) において $n=3$ とし，剰余項を無視したテーラー展開を求めよ。

(1) $z = f(x,y) = (x-1)(y+2) \qquad (a,b) = (0,0)$

(2) $z = f(x,y) = \dfrac{1}{1-2x+3y} \qquad (a,b) = (0,0)$

(3) $z = f(x,y) = \sin(x+y) \qquad (a,b) = \left(\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$

2.7　極値

ある点 (a,b) の周りで $f(a,b)$ の値が他の $f(x,y)$ より大きいとき**極大値**という。逆に他の値より小さいとき**極小値**という。正確に言うと，ある正数 δ が存在して，$0 < \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < \delta$ ならば $f(x,y) < f(a,b)$ が成立しているとき，$f(x,y)$ は (a,b) で極大といい，$f(a,b)$ を極大値という。$f(x,y) \leqq f(a,b)$ が成立するとき**広義の極大**といい，$f(a,b)$ を**広義の極大値**という。極小も同様に定義できる。極大値・極小値合わせて**極値**という。

関数 $z = f(x,y)$ が $f_x(a,b) = 0$ かつ $f_y(a,b) = 0$ を満たすとき，点 (a,b) を関数 $z = f(x,y)$ の**臨界点**と呼ぶ。1 変数関数と同様に $z = f(x,y)$ が点 (a,b) で (広義の) 極値をとれば，(a,b) が臨界点である事が分かる。即ち次が成立する。

命題 2.22 (a,b) で f が極値をとるならば，(a,b) は f の臨界点である。

この逆の「臨界点は極値」は一般に正しくないが次が成立する。

定理 2.23 (a,b) を関数 $z = f(x,y)$ の臨界点とする。$H(x,y) = f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2$ とおくと次が成立する。

(1) $H(a,b) > 0$ のとき $f(x,y)$ は (a,b) で極値をとる。

　1) $f_{xx}(a,b) > 0$ のとき $f(a,b)$ は極少値である。

　2) $f_{xx}(a,b) < 0$ のとき $f(a,b)$ は極大値である。

(2) $H(a,b) < 0$ のとき極値でない。

(3) $H(a,b) = 0$ のときはこれだけでは分らない。極値になる場合もならない場合もある。

例 2.24 $z = f(x,y) = x^4 + y^4 + 2x^2y^2 - 2y^2$ の極値を調べよう。最初に極値候補となる臨界点を求めよう。$z_x = 4x^3 + 4xy^2 = 0$, $z_y = 4y^3 + 4x^2y - 4y = 0$ の共通解が求めるものになる。この連立方程式を実数の範囲で解くと $(x,y) = (0,0), (0,1), (0,-1)$ を得る。

$z_{xx} = 12x^2 + 4y^2$, $z_{xy} = 8xy$, $z_{yy} = 12y^2 + 4x^2 - 4$ なので $H(0,\pm 1) = 32 > 0$, $H(0,0) = 0$ となる。定理 2.23 より，z は $(0,\pm 1)$ で極小である。$H(0,0) = 0$ なので $(0,0)$ の様子は定理 2.23 からは分からない。個別に調べなければならない。この場合は極値になりそうもないと当りをつけてそれを示す。

x–軸上に制限して考えると，$f(x,0) = x^4$ である。x–軸上では $(0,0)$ は極小，即ちいくらでも近くに $f(0,0)$ より大きな値を取る点が存在する。y–軸上に制限すると $f(0,y) = y^4 - 2y^2$ でこの 4 次関数は y–軸上では $(0,0)$ で極大，即ちいくらでも近くに $f(0,0)$ より小さい値を取る点が存在する。2 つを合わせると $(0,0)$ が極値でない事が分かる。

演習問題 2.13 次の関数の極大・極小を求めよ。

(1) $z = x^2 - xy + y^2 - 2x + 3y + 1$ (2) $z = x^2 - 5xy + 2y^2 + x - y - 3$

(3) $z = \dfrac{ax + by}{x^2 + y^2 + 1}$ $(a \neq 0, b \neq 0)$ (4) $z = e^{-(x^2+y^2)}(ax^2 + by^2)$ $(a > b > 0)$

最大値・最小値を与える点は広義の極値になっているので，最大値・最小値を求めるとき極値問題を適用できる。次の例を考える。

辺の和が一定の直方体の中で体積最大になるものを求めよ。

3 辺の長さを x, y, z とする。和が一定なので，それを ℓ とすると，$x + y + z = \ell$ である。体積を V とすると，$V = xyz = xy(\ell - x - y)$ である。$\dfrac{\partial V}{\partial x} = y(\ell - 2x - y)$, $\dfrac{\partial V}{\partial y} = y(\ell - x - 2y)$ より，$\dfrac{\partial V}{\partial x} = 0, \dfrac{\partial V}{\partial y} = 0$ を連立させて解くと $x = y = \dfrac{\ell}{3}$ を得る。

この解法は一見よさそうに思われるが，良く考えてみると示しているのは『最大値が存在するならばそれは $x = y = \dfrac{\ell}{3}$ である』という事だけである。最大値の存在証明もするためには定理 2.7 を必要とする。もう一度書いておくと

定理 2.7 有界閉集合で定義された連続関数は最大値をとる。

この定理と次の命題を用いると上記問題に対するきちんとした解答が得られる。

命題 2.25 領域 D で定義された関数が最大値をとるとき次のいずれかである。
(1) 領域の内部の点であり，そこで広義の極値をとる。
(2) 境界上の点である。

上の問題についてもう一度厳密に解答しよう。そのためには有界閉集合の問題にする必要がある。つまり直方体だけでなく「つぶれた直方体」も考える必要が出て来る。$V = xy(\ell - x - y)$ と

する ($\ell > 0$)。$D = \{\,(x, y) \in \boldsymbol{R}2 \mid\ x \geqq 0, y \geqq 0, x + y \leqq \ell\,\}$ 上で V の最大値を求める問題を考える。D は有界閉集合で，V は連続関数なので最大値が存在する。境界上での値は $V = 0$ なので最大値は D の内部に存在する。よって広義の極値になっている。V の極値は $\left(\dfrac{\partial V}{\partial x}, \dfrac{\partial V}{\partial y}\right) = (0, 0)$ となるが，これを解くと $x = y = \dfrac{\ell}{3}$ となるので，これが求めるものである。

演習問題 2.14

(1) 3 辺の和が一定の 3 角形の中で面積最大のものを求めよ。

(2) 定円に内接する 3 角形のなかで面積最大のものを求めよ。

2.8 陰関数

高校時代に次の様な議論をしたかもしれない。

$x^2 + y^2 = 1$ を x で微分すると $2x + 2y\dfrac{dy}{dx} = 0$ なので，$\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{x}{y}$ である。

式 $x^2 + y^2 = 1$ は明示的に関数を定義しているわけではないが，陰覆的に定義してると考える。この議論をきちんと述べよう。

定義 2.26 関数 $F(x, y)$ と $F(a, b) = 0$ となる点 (a, b) に対し，a の近傍[(1)]で定義された関数 $y = f(x)$ が存在して，1) 定義されている任意の x に対し $F(x, f(x)) = 0$，2) $b = f(a)$，が成立する時，F は点 (a, b) の近傍で，**陰関数** $y = f(x)$ を定めるという。またこの f を (a, b) の近傍で定まる陰関数という。

3 変数関数の場合は，関数 $F(x_1, x_2, y)$ と，$F(a_1, a_2, b) = 0$ となる点 (a_1, a_2, b) に対し，(a_1, a_2) の近傍[(2)]で定義された関数 $y = f(x_1, x_2)$ が存在して $F(x_1, x_2, f(x_1, x_2)) = 0$，$b = f(a_1, a_2)$ が成立する時，F は点 (a_1, a_2, b) において，**陰関数** $y = f(x_1, x_2)$ を定めるという。

定理 2.27 $F(x, y)$ に対し $F(a, b) = 0$，$F_y(a, b) \neq 0$ ならば a の近傍で陰関数 $y = f(x)$ が存在する。この時，F が C^r 級なら f も C^r 級。$\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{F_x}{F_y}$ である。

$F(x_1, x_2, y)$ に対し $F(a_1, a_2, b) = 0$，$F_y(a_1, a_2, b) \neq 0$ ならば (a_1, a_2) の近傍で陰関数 $y = f(x_1, x_2)$ が存在する。この時，F が C^r 級なら f も C^r 級。$\dfrac{\partial y}{\partial x_1} = -\dfrac{F_{x_1}}{F_y}$，$\dfrac{\partial y}{\partial x_2} = -\dfrac{F_{x_2}}{F_y}$ である。

$F(x, y) = x^3 - 3xy + y^3 = 0$(デカルトの正葉線) 両辺を x で微分することにより

$$y' = \frac{x^2 - y}{x - y^2}$$

を得る。これを更に x で微分する事により

$$y'' = \frac{2xy}{(x - y^2)^3}$$

が分かる。

(1)近傍とはある正数 δ が存在して $\{\,x \mid\ |x - a| < \delta\,\}$ となる集合の事。

(2)この場合の近傍とはある正数 δ が存在して $\left\{\,(x, y) \,\middle|\ \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2} < \delta\,\right\}$ となる集合の事。

2 つの式 $x^2+y^2+z^2+w^2=1$, $x+y+z+w=0$ が与えられているとする。このとき 2 つの変数は残りの 2 つの変数の関数と見ることが出来る。今 z,w を x,y の関数と見て x に関して微分すれば $2x+2zz_x+2ww_x=0$, $1+z_x+w_x=0$ が分かる。これを解くと

$$z_x=\frac{w-x}{z-w} \qquad w_x=\frac{z-x}{w-z}$$

を得る。同様に y に関して実行すれば

$$z_y\frac{w-y}{z-w} \qquad w_y=\frac{z-y}{w-z}$$

を得る。

演習問題 2.15 次で与えられる陰関数に関し $\dfrac{dy}{dx}, \dfrac{d^2y}{dx^2}$ を求めよ。

(1) $1-y+xe^y=0$

(2) $x^3y^3+y-x=0$