数理解析 I 問題解説 #2

河野

間違いがないように注意はしていますが，間違いを見つけた人は教えてください。解説の仕方が不十分で理解しづらい等の意見があればお寄せ下さい。できれば具体的に指摘していただいた方がありがたいです。改良できる範囲で改良して行きます。イントロでも言ったように，そのものズバリの解答は書きません。しかし実際書きはじめてみるとこれはなかなか難しいものです。

演習問題 0.1　次の命題 (?) の否定命題をつくれ，また対偶命題をつくれ。
(1) テストが終ったならば退席してもよい。
(2) 数理解析 I は勉強しないと合格しない。
(3) 彼は怒られないと勉強しない。

命題を $P \Longrightarrow Q$ の形に直すと，その否定命題は $P \wedge \neg Q$，対偶命題は $\neg Q \Longrightarrow \neg P$ である。ここでは (2) のみ解説しておく。

否定命題は「数理解析 I は勉強ぜすかつ合格する」である。対偶命題は「数理解析 I は合格するならば勉強する」すなわち「数理解析 I は合格する人は勉強していた人である」である。(2) が正しいとしても,「勉強すれば必ず合格する」事を保証している分ではない。

演習問題 0.2　例 0.2 を真理表を書いて証明せよ。

(3) のみ示しておこう。

P	Q	$P \wedge Q$	$\neg P$	$\neg Q$	$\neg P \vee \neg Q$	$\neg(P \wedge Q)$
T	T	T	F	F	F	F
T	F	F	F	T	T	T
F	T	F	T	F	T	T
F	F	F	T	T	T	T

真理表の真偽が一致しているので $\neg(P \wedge Q) \equiv \neg P \vee \neg Q$ である。

演習問題 0.3　『$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$』の否定命題を作れ。また『$\lim_{n \to \infty} a_n = a$』の否定命題を作れ。

『$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$』の厳密な定義は「任意の正数 ε に対しある正数 δ が存在して，任意の x について $|x-a| < \delta$ ならば $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ が成立する」事である。この命題を

任意の正数 ε に対し「ある正数 δ が存在して，任意の x について
$|x-a| < \delta$ ならば $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ が成立する」

と考えて否定すると，

ある正数 ε が存在して「ある正数 δ が存在して，任意の x について
$|x-a| < \delta$ ならば $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ が成立する」事はない

となる。「ある正数 δ が存在して，任意の x について $|x-a|<\delta$ ならば $|f(x)-f(a)|<\varepsilon$ が成立する」事はない，という主張は

任意の正数 δ に対し「任意の x について
$|x-a|<\delta$ ならば $|f(x)-f(a)|<\varepsilon$ が成立する」事はない

を意味する。「任意の x について $|x-a|<\delta$ ならば $|f(x)-f(a)|<\varepsilon$ が成立する」事はない，と言う主張は

ある x が存在して「$|x-a|<\delta$ ならば $|f(x)-f(a)|<\varepsilon$ が成立する」事はない

を意味する。「$|x-a|<\delta$ ならば $|f(x)-f(a)|<\varepsilon$」の否定は「$|x-a|<\delta$ かつ $|f(x)-f(a)|\geqq\varepsilon$」である。以上をあわせると結論は

ある正数 ε が存在して，任意の正数 δ に対し，ある x が存在して，
$|x-a|<\delta$ かつ $|f(x)-f(a)|\geqq\varepsilon$ が成立する

となる。

これを形式的に見ると，(任意) $\Longrightarrow$ (存在)，(存在) $\Longrightarrow$ (任意) と変形し，最後の命題を否定する事になっている。

『$\lim_{n\to\infty} a_n = a$』の厳密な定義は「任意の正数 ε に対しある自然数 N が存在して，任意の自然数 n について $n>N$ ならば $|a_n-a|<\varepsilon$ が成立する」事である。形式的変形で考えると

ある正数 ε が存在して，任意の自然数 N に対し，ある自然数 n が存在して
$n>N$ かつ $|a_n-a|\geqq\varepsilon$ が成立する。

演習問題 0.4　I で定義された関数 $y=f(x)$ を考える。$y=f(x)$ が $x=a$ で連続とは『$\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$』と定義される。$y=f(x)$ が I で連続である (単に $y=f(x)$ は連続関数ともいう) とは，I のすべての点 a で『$\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$』が成立する事と定義される。次の命題を「任意・存在」を用いてきちんと書き直せ。

(1) $y=f(x)$ が連続関数である。
(2) $y=f(x)$ が連続関数でない。
(3) 閉区間 I で定義された連続関数 $y=f(x)$ は最大値をとる (最大値定理)。
(4) 区間 $[a,b]$ で定義された連続関数 $y=f(x)$ が $f(a)<0<f(b)$ を満たせば $f(c)=0$ となる点 c $(a<c<b)$ が存在する (中間値の定理)。

(1) 『$\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$』の厳密な定義は「任意の正数 ε に対しある正数 δ が存在して，任意の x について $|x-a|<\delta$ ならば $|f(x)-f(a)|<\varepsilon$ が成立する」事であった。「f が I で連続」の定義は任意の $a\in I$ に対し『$\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$』が成立する事なので，形式的に代入すると

任意の $a\in I$ に対し
任意の正数 ε に対しある正数 δ が存在して，任意の x について
$|x-a|<\delta$ ならば $|f(x)-f(a)|<\varepsilon$ が成立する

となる。このままだと日本語として不自然なので，

任意の $a \in I$ と任意の正数 ε に対し
ある正数 δ が存在して，任意の x について
$|x-a|<\delta$ ならば $|f(x)-f(a)|<\varepsilon$ が成立する

と変形して述べておこう。
(2) 否定するには前問で考えたように，(任意) $\Longrightarrow$ (存在)，(存在) $\Longrightarrow$ (任意) とし，最後の部分を否定すればよかった。(1) を否定すればよいので

ある $a \in I$ とある正数 ε が存在し
任意の正数 δ に対し，ある x が存在し
$|x-a|<\delta$ かつ $|f(x)-f(a)| \geqq \varepsilon$ が成立する

(3) 「I で定義された関数 f が b で最大値をとる」という命題をきちんと書くと「任意の $x \in I$ に対し $f(x) \leqq f(b)$ が成立する」となる。最大値定理はその様な b が存在する事を主張するものなので

任意の閉区間 I と I で定義された任意の連続関数 f に対し，
ある $b \in I$ が存在して，任意の $x \in I$ に対し
$f(x) \leqq f(b)$ が成立する。

となる。
連続ということも含めて書くと

任意の閉区間 I と I で定義された任意の関数 f に対し，
任意の $a \in I$ と任意の正数 ε に対し
ある正数 δ が存在して，任意の x について
$|x-a|<\delta$ ならば $|f(x)-f(a)|<\varepsilon$ が成立するならば
ある $b \in I$ が存在して，任意の $x \in I$ に対し
$f(x) \leqq f(b)$ が成立する。

となる。
(4) は各自試みよ。