数理解析 I 問題解説 #5

河野

演習問題 1.2　テキストを参考にして，定理 1.13, 1.14, 1.15 を証明せよ。

定理 1.13 の証明：　**(1)**

$$
\begin{aligned}
(f+g)'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{(f+g)(x+h)-(f+g)(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)+g(x+h)-f(x)-g(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)+g(x+h)-g(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\left\{\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right\} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h} \\
&= f'(x)+g'(x)=(f'+g')(x)
\end{aligned}
$$

(2)

$$
\begin{aligned}
(af)'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{(af)(x+h)-(af)(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{af(x+h)-af(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}a\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\
&= a\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\
&= af'(x)=(af')(x)
\end{aligned}
$$

(3) $f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x)=f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x+h)+f(x)g(x+h)-f(x)g(x)$ と変形すると

$$
\begin{aligned}
(fg)'(x) &= (f(x)g(x))' \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x+h)+f(x)g(x+h)-f(x)g(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\left\{\frac{f(x+h)-f(x)}{h}g(x+h)+f(x)\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right\} \\
&= \lim_{h\to 0}\left\{\frac{f(x+h)-f(x)}{h}g(x+h)\right\}+\lim_{h\to 0}\left\{f(x)\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right\} \\
&= \lim_{h\to 0}\left\{\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right\}\lim_{h\to 0}g(x+h)+f(x)\lim_{h\to 0}\left\{\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right\} \\
&= f'(x)g(x)+f(x)g'(x)=(f'g+fg')(x)
\end{aligned}
$$

(4) $k=\dfrac{f}{g}$ とおくと $f=gk$ なので，両辺を微分すると $f'=g'k+gk'$ となる。よって

$$k'=\frac{f'-g'k}{g}=\frac{f'-g'\dfrac{f}{g}}{g}=\frac{f'g-g'f}{g^2}$$

を得る。

(4) の解説は不十分点を含んでいる。それを指摘するのを意欲あるものに対する追加の演習問題とする。

定理 1.14 の証明： $k=f(x+h)-f(x)$ とおくと，$h\to 0$ のとき $k\to 0$ となる。

$$\begin{aligned}
\frac{dz}{dx} &= \lim_{h\to 0}\frac{g\circ f(x+h)-g\circ f(x)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\left\{\frac{g(f(x+h))-g(f(x))}{k}\,\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right\}\\
&= \lim_{k\to 0}\left\{\frac{g(f(x)+k)-g(f(x))}{k}\right\}\lim_{h\to 0}\left\{\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right\}\\
&= \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx}
\end{aligned}$$

となる。

この証明には 1 つ不十分な点がある。それを指摘して証明を完成させるのを意欲のあるものに対する追加の演習問題とする。

定理 1.15 の証明： 定理 1.12 より f には逆関数 g が存在する。$y=f(x)$ とすると，$x=g(y)$ なので f と g の合成関数 $z=g\circ f$ は $z=x$ なので $\dfrac{dz}{dx}=1$ である。定理 1.14 より $\dfrac{dz}{dx}=\dfrac{dz}{dy}\dfrac{dy}{dx}$ となるが $z=x$ なので $1=\dfrac{dx}{dy}\dfrac{dy}{dx}$ となり定理 1.15 が成立する。

演習問題 1.3 任意の自然数 n に対して $(x^n)'=nx^{n-1}$ が成立する事を示せ。

数学的帰納法で証明しよう。

(1) $n=1$ **のとき：** $y=f(x)=x$ とすると

$$y'=\lim_{h\to 0}\frac{x+h-x}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h}{h}=\lim_{h\to 0}1=1$$

となる。$x^0=1$ と考えると，$n=1$ のとき成立している。

(2) $n=k$ **のとき成立を仮定：** 積の微分法 (定理 1.13(3)) より

$$(x^{k+1})'=(x\cdot x^k)'=x'x^k+x(x^k)'$$

となる。帰納法の仮定より $(x^k)'=kx^{k-1}$ となるので $(x^{k+1})'=1(x^k)+x(kx^{k-1})=x^k+kx^k=(k+1)x^k=(k+1)x^{(k+1)-1}$ となり，$n=k+1$ でも成立している。よってすべての n で成立している。

演習問題 1.4 次の有理関数の導関数を求めよ。

(1) $y=\dfrac{x-1}{x+1}$　　(2) $y=\dfrac{x^2+1}{x^2-1}$　　(3) $y=\dfrac{1}{x^2+1}$

$(x^n)' = nx^{n-1}$ と商の微分法 (定理 1.13(4)) を組み合わせればできるので省略する。

演習問題 1.5　n を自然数，m を整数とする。関数 $y = x^{\frac{m}{n}}$ の導関数を求めよ。

最初に m を整数とするとき $(x^m)' = mx^{m-1}$ を示しておく。m が自然数のときは演習問題 1.3 で示した。$m = 0$ のときは $x^0 = 1$ と考えると $(x^0)' = 1' = 0 = 0x^{-1}$ で成立している。m が負の整数のときは $m = -n$ とおき，n に関する数学的帰納法で示す。

(1) $n = 1$ **のとき：**　商の微分法より $(x^{-1})' = \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2} = -x^{-2} = (-1)x^{-1-1}$ となり成立している。

(2) $n = k$ **のとき成立を仮定：** 帰納法の仮定より $(x^{-k})' = (-k)x^{-k-1}$ が成立している。$(x^{-(k+1)})' = (x^{-k}x^{-1})' = (x^{-k})'x^{-1} + x^{-k}(x^{-1})' = -kx^{-k-1}x^{-1} - x^{-k}x^{-2} = -kx^{-k-1} - x^{-k-2} = -(k+1)x^{-k-2} = -(k+1)x^{-(k+1)-1}$ となり $n = k+1$ でも成立している。よってすべての自然数 n で成立している。

以上により $(x^m)' = mx^{m-1}$ はすべての整数で成立している。

演習問題に戻ろう。$u = x^{1/n}$ とおくと $y = u^m$ であり，$y = x^{\frac{m}{n}}$ は合成関数と見ることができる。よって $\left(x^{\frac{m}{n}}\right)' = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = mu^{m-1}\frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1} = \frac{m}{n}x^{\frac{m-1}{n}}x^{\frac{1}{n}-1} = \frac{m}{n}x^{\frac{m}{n}-1}$ となる。

演習問題 1.6　次の関数の導関数を定義に基づいて求めよ。ただし次の極限値は用いてよい。

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h} = 1 \qquad \lim_{h\to 0}\frac{e^h - 1}{h} = 1$$

(1) $y = x^3$　　(2) $y = \dfrac{x+1}{x^2+1}$

(3) $y = \cos 2x$　　(4) $y = \log x$

講義中にも言ったが，**定義に基づいて**とある場合は諸公式は用いてはいけない。定義のみを用いて計算する事。

(1)

$$\begin{aligned}
(x^3)' &= \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^3 - x^3}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - x^3}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{3x^2h + 3xh^2 + h^3}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\left\{3x^2 + 3xh + h^2\right\} = 3x^2
\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}
\left(\frac{x+1}{x^2+1}\right)' &= \lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{(x+h)+1}{(x+h)^2+1}-\dfrac{x+1}{x^2+1}}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{(x^2+1)\{(x+h)+1\}-(x+1)\{(x+h)^2+1\}}{h\{(x+h)^2+1\}\{x^2+1\}}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{(x^2+1)(x+1)+(x^2+1)h-(x+1)(x^2+1)-(x+1)(2xh+h^2)}{h\{(x+h)^2+1\}\{x^2+1\}}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{h\{x^2+1-2x^2-2x-h(x+1)\}}{h\{(x+h)^2+1\}\{x^2+1\}}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{x^2+1-2x^2-2x-h(x+1)}{\{(x+h)^2+1\}\{x^2+1\}}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{-x^2-2x+1}{(x^2+1)^2}
\end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned}
(\cos 2x)' &= \lim_{h\to 0}\frac{\cos 2(x+h)-\cos 2x}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\cos 2x\cos 2h-\sin 2x\sin 2h-\cos 2x}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\cos 2x(\cos 2h-1)-\sin 2x\sin 2h}{h}\\
&= \cos 2x\lim_{h\to 0}\frac{\cos 2h-1}{h}-\sin 2x\lim_{h\to 0}\frac{\sin 2h}{h}
\end{aligned}$$

ここで $\dfrac{\cos 2h-1}{h}=\dfrac{(\cos 2h-1)(\cos 2h+1)}{h(\cos 2h+1)}=\dfrac{\cos^2 2h-1}{h(\cos 2h+1)}=-\dfrac{\sin^2 2h}{h(\cos 2h+1)}$ なので

$$\begin{aligned}
&= -\cos 2x\lim_{h\to 0}\frac{\sin^2 2h}{h(\cos 2h+1)}-2\sin 2x\lim_{h\to 0}\frac{\sin 2h}{2h}\\
&= -\cos 2x\lim_{h\to 0}\frac{\sin 2h}{2h}\frac{2\sin 2h}{\cos 2h+1}-2\sin 2x\\
&= -2\sin 2x
\end{aligned}$$

となる。

(4) $k=\log(x+h)-\log x$ とおくと $h\to 0$ のとき $k\to 0$ である。また $k=\log\dfrac{x+h}{x}$ なので $\dfrac{x+h}{x}=e^k$ となり，$h=x(e^k-1)$ を得る。よって

$$\begin{aligned}
(\log x)' &= \lim_{h\to 0}\frac{\log(x+h)-\log x}{h}\\
&= \lim_{k\to 0}\frac{k}{x(e^k-1)}=\frac{1}{x}\lim_{k\to 0}\frac{k}{e^k-1}=\frac{1}{x}
\end{aligned}$$

となる。

演習問題 1.7　次の関数の導関数を求めよ (諸公式を用いてよい)。

(1) $y = xe^x$

(2) $y = \sin^{100} 2x$

(3) $y = x^3 \log(2x^3 + x)$

(4) $y = \arcsin(-x^2 + 1)$

(5) $y = x^x$

積の微分法及び合成関数の微分法を組み合わせるとできるので，(5) 以外は省略する。(1)–(4) ができない人は少し焦って復習をきちんとすること。

(5) は**対数微分法**と呼ばれる方法を用いる。両辺の対数をとると $\log y = \log x^x = x \log x$ である。

$$\frac{d}{dx} \log y = \frac{dy}{dx} \frac{d}{dy} \log y = \frac{dy}{dx} \frac{1}{y}$$

なので，両辺を x で微分すると $\dfrac{dy}{dx} \dfrac{1}{y} = \dfrac{d}{dx}(x \log x) = \log x + x \dfrac{1}{x} = \log x + 1$ となるので

$$\frac{dy}{dx} = y(\log x + 1) = x^x(\log x + 1)$$

となる。