数理解析 I 問題解説 #6

河野

演習問題 1.8　実際に (1) を用いて (2) を証明せよ。

$h(x) = f(x) - g(x)$ とおく。$h'(x) = f'(x) - g'(x) = 0$ なので，(1) より $h(x)$ は定数関数である。定数を C とおくと $h(x) = C$ となる。よって $f(x) = g(x) + C$ が得られる。

演習問題 1.9　(1) を証明せよ。

$x_1 < x_2$ を満たす任意の x_1, x_2 に対し平均値の定理を適用するとある $c\ (x_1 < c < x_2)$ が存在して $f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1)$ と書ける。このとき $f'(c) > 0, x_2 - x_1 > 0$ より $f(x_2) - f(x_1) > 0$ 即ち $f(x_1) < f(x_2)$ となる。よって f は単調増加である。

演習問題 1.10　(1) を証明せよ。

$x_1 < x_2$ を満たす任意の x_1, x_2 に対し平均値の定理を適用するとある $c\ (x_1 < c < x_2)$ が存在して $f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1)$ と書ける。このとき $f'(c) \geqq 0, x_2 - x_1 > 0$ より $f(x_2) - f(x_1) \geqq 0$ 即ち $f(x_1) \leqq f(x_2)$ となる。よって f は単調非減少である。

演習問題 1.11　定理 1.18 を用いて定理 1.23 を証明せよ。

$\displaystyle\lim_{x\to a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ 及び $\displaystyle\lim_{x\to a-0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a-0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ を証明すれば定理 1.23 が得られる。ここでは 1 番目の式を証明する。2 番目の式は同様に得られるので省略する。定理 1.23 には明示的に書いてはいないが，$f(x)$ および $g(x)$ は $x = a$ 以外では微分可能なので，$x = a$ 以外では連続である。また $\displaystyle\lim_{x\to a} f(x) = 0$ なので $f(a) = 0$ と定義すると $x = a$ でも連続になる。同様に $g(a) = 0$ と定義する。今 $h > 0$ を任意に 1 つ固定する。$b = a + h$ とすると $f(x), g(x)$ は定理 1.18 の条件を満たしているので，ある $c\ (a < c < a + h)$ が存在して，

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(a+h) - f(a)}{g(a+h) - g(a)} = \frac{f(a+h)}{g(a+h)}$$

が成立する。ここで $h \to +0$ とすると $c \to +0$ となるので

$$\lim_{x\to a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{h\to +0} \frac{f(a+h)}{g(a+h)} = \lim_{h\to +0} \frac{f'(c)}{g'(c)} = \lim_{x\to a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

が成立する。

演習問題 1.12　次の極限を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\log x}{x - 1}$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{a^x - b^x}{x}\quad (a, b > 0)$　　(4) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x - \arcsin x}{x^3}$

(5) $\displaystyle\lim_{x\to 0} (\cos x)^{1/x}$　　(6) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \left(\log(x^2 + 1) - \log x^2\right)$

(1) のみ解説しておく。ロピタルの定理を適用すると $\lim_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{3x^2}$ となる。この右辺の極限はロピタルの定理の仮定を満たしているので，更にロピタルの定理を適用すると $\lim_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{6x}$ となる。ここでもう一度ロピタルの定理を使うと $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{6x}=\lim_{x\to 0}\dfrac{\cos x}{6}$ となり，$\lim_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}=\dfrac{1}{6}$ を得る。

演習問題 1.13　次の関数の概形を書け。

(1) $y=x^{-x^2}$　　(2) $y=xe^{-x^2}$

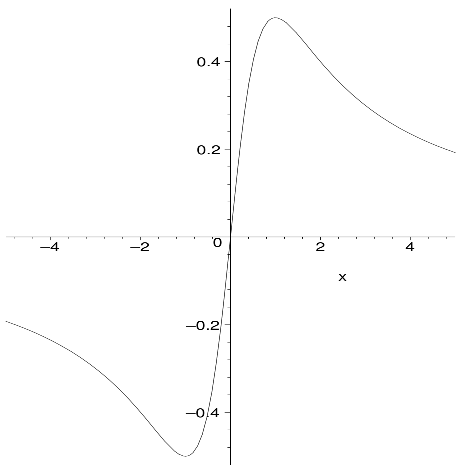
(3) $y=\dfrac{x}{1+x^2}$　　(4) $y=x\log x \quad (x>0)$

(5) $y=\dfrac{x^2-x+1}{x^2+x+1}$　　(6) $y=e^{-x}\sin x$

(3) のみ解説しておこう。$y=\dfrac{x}{1+x^2}$ を微分すると $y'=\dfrac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$ となる。$y'=0$ となるのは $x=-1,1$ である。これでも増減表は書けるが関数の凹凸も含めて書くために 2 階の導関数を求める。$y''=\dfrac{-2x(3-x^2)}{(1+x^2)^3}$ となるので $y''=0$ となるのは $x=\pm\sqrt{3},0$ である。よって増減表は次の様になる。

x		$-\sqrt{3}$		-1		0		1		$\sqrt{3}$	
y'	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
y''	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
y	$\searrow$	$\searrow$	$\searrow$	$\to$	$\nearrow$	$\nearrow$	$\nearrow$	$\to$	$\searrow$	$\searrow$	$\searrow$

凹凸を考慮して図を書くと次の様になっている。



演習問題 1.14　次のようにパラメータ表示された曲線の概形を書け。

(1) $x=x(t)=t^4-t^2, y=y(t)=t^3-t$

(2) $x=x(t)=t-t^3, y=y(t)=1-t^4$

(1) のみ描いておこう。$x' = 4t^3 - 2t = 2t(2t^2 - 1)$ となるので，$t = 0, \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ において $x' = 0$ となる。また $y' = 3t^2 - 1$ となるので，$t = \pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ において $y' = 0$ となる。よって増減表および概形はは以下の様になる。

t		$-\frac{1}{\sqrt{2}}$		$-\frac{1}{\sqrt{3}}$		0		$\frac{1}{\sqrt{3}}$		$\frac{1}{\sqrt{2}}$	
x'	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
x	$\leftarrow$		$\rightarrow$	$\rightarrow$	$\rightarrow$		$\leftarrow$	$\leftarrow$	$\leftarrow$		$\rightarrow$
y'	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
y	$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$		$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$		$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$
曲線	$\nwarrow$	$\uparrow$	$\nearrow$	$\rightarrow$	$\searrow$	$\downarrow$	$\swarrow$	$\leftarrow$	$\nwarrow$	$\uparrow$	$\nearrow$