数理解析 I 問題解説 #7

河野

演習問題 1.15　近似の度合の最もよい 3 次式を求めよ。ただし 3 次式 $y = a + bh + ch^2 + dh^3$ が近似の度合が最もよいとは $f(x+h) - (a + bh + ch^2 + dh^3) = \varepsilon h^3$ と置いたとき $\lim_{h \to 0} \varepsilon = 0$ が成立する事をいう。

近似の度合の最もよい 4 次式を求めよ。ただし 4 次式 $y = a + bh + ch^2 + dh^3 + eh^4$ が近似の度合が最もよいとは $f(x+h) - (a + bh + ch^2 + dh^3 + eh^4) = \varepsilon h^4$ と置いたとき $\lim_{h \to 0} \varepsilon = 0$ が成立する事をいう。

$f(x+h) = a + bh + ch^2 + dh^3 + \varepsilon h^3$ において $h \to 0$ とすると右辺の極限値は a，左辺の極限値は $f(x)$ [1]である。よって $a = f(x)$ が分かる。

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = b + ch + dh^2 + \varepsilon h^2$$

と変形して $h \to 0$ とすると，右辺の極限値は b，左辺の極限値は $f'(x)$ である。よって $b = f'(x)$ を得る。

$$\frac{f(x+h) - f(x) - f'(x)h}{h^2} = c + dh + \varepsilon h$$

と変形して $h \to 0$ とすると右辺の極限は c である。左辺はロピタルの定理を適用して (ただし変数は x でなくて h である。微分も x に関する微分ではなく h **に関する微分**である)

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x) - f'(x)h}{h^2} = \lim_{h \to 0} \frac{f'(x+h) - f'(x)}{2h} = \frac{f''(x)}{2}$$

となる。よって $c = \dfrac{f''(x)}{2}$ となる。

$$\frac{f(x+h) - f(x) - f'(x)h - \dfrac{f''(x)}{2}h^2}{h^3} = d + \varepsilon$$

と変形して $h \to 0$ とすると，右辺の極限値は d となる。左辺はロピタルの定理を 2 度適用すると

$$\begin{aligned}
\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x) - f'(x)h - \dfrac{f''(x)}{2}h^2}{h^3} &= \lim_{h \to 0} \frac{f'(x+h) - f'(x) - f''(x)h}{3h^2} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{f''(x+h) - f''(x)}{6h} \\
&= \frac{f'''(x)}{6}
\end{aligned}$$

となる。よって $d = \dfrac{f'''(x)}{6}$ となる。以上により求める 3 次式は

$$f(x) + f(x)h + \frac{f''(x)}{2}h^2 + \frac{f'''(x)}{6}h^3$$

となる。

---

[1] この節では関数は何回でも微分できると仮定している。微分可能な関数は連続である。

4 次式の場合も前半は 3 次式での近似の場合と同様に証明が進む。よって $a = f(x), b = f'(x), c = \dfrac{f''(x)}{2}, d = \dfrac{f'''(x)}{6}$ は示されているとする。

$$F(h) = \frac{f(x+h) - f(x) - f'(x)h - \dfrac{f''(x)}{2}h^2 - \dfrac{f'''(x)}{6}h^3}{h^4}$$

とおく。$F(h) = e + \varepsilon$ なので $h \to 0$ とすると右辺は e となる。左辺はロピタルの定理を 3 回用いると

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} F(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f'(x+h) - f'(x) - f''(x)h - \dfrac{f'''(x)}{2}h^2}{4h^3} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f''(x+h) - f''(x) - f'''(x)h}{12h^2} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f'''(x+h) - f'''(x)}{24h} \\
&= \frac{f^{(4)}(x)}{24}
\end{aligned}$$

となる。よって求める 4 次式は

$$f(x) + f'(x)h + \frac{f''(x)}{2}h^2 + \frac{f'''(x)}{6}h^4 + \frac{f^{(4)}(x)}{24}h^4$$

である。

演習問題 1.16　次の関数の $x = 0$ におけるテーラー級数を求めよ (テーラー展開可能であることは仮定してよい)。

(1) $f(x) = \log(1+x)$

(2) $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$

(3) $f(x) = \sqrt{1+x}$

(4) $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$

(5) $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$

(1) $f'(x) = \dfrac{1}{1+x}, f''(x) = -\dfrac{1}{(1+x)^2}, f'''(x) = \dfrac{2}{(1+x)^3}$ なので $f^{(n)}(x) = (-1)^{n+1}\dfrac{(n-1)!}{(1+x)^n}$ $(n \geqq 1)$ と予想して数学的帰納法で証明する。$n = 1$ のときはすでに計算して成立している。$n = k$ のときの成立を仮定する。即ち $f^{(k)}(x) = (-1)^{k+1}\dfrac{(k-1)!}{(1+x)^k}$ の成立を仮定する。両辺を x で微分すると

$$f^{(k+1)}(x) = (-1)^{k+1}\frac{-k(k-1)!}{(1+x)^{k+1}} = (-1)^{(k+1)+1}\frac{((k+1)-1)!}{(1+x)^{k+1}}$$

となるので $n = k+1$ でも成立している。よってすべての n で成立する。$f(0) = 0, f^{(n)}(0) = (-1)^{n+1}(n-1)!$ $(n \geqq 1)$ なので

$$\begin{aligned}
f(x) &= f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2!}f''(0)x^2 + \cdots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(0)x^n + \cdots \\
&= x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \cdots + (-1)^{n+1}\frac{1}{n}x^n + \cdots
\end{aligned}$$

となる。

(2) $f'(x)=\dfrac{1}{(1-x)^2}, f''(x)=\dfrac{2}{(1-x)^3}$ なので $f^{(n)}(x)=\dfrac{n!}{(1-x)^{n+1}}$ と予想して数学的帰納法で証明する。$n=1$ のときはすでに計算して成立している。$n=k$ のときの成立を仮定する。即ち $f^{(k)}(x)=\dfrac{k!}{(1-x)^{k+1}}$ の成立を仮定する。両辺を x で微分すると

$$f\ (k+1)(x)=\frac{k!\,(k+1)}{(1-x)^{k+2}}=\frac{(k+1)!}{(1-x)^{(k+1)+1}}$$

となるので $n=k+1$ でも成立している。よってすべての n で成立する。$f(0)=1, f^{(n)}(0)=n!$ $(n\geqq 1)$ なので

$$\begin{aligned} f(x) &= f(0)+f'(0)x+\frac{1}{2!}f''(0)x^2+\cdots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(0)x^n+\cdots \\ &= 1+x+x^2++\cdots+x^n+\cdots \end{aligned}$$

となる。

(3) ここでは $f(x)=(1+x)^\alpha$ のテーラー級数を求める。$\alpha=\dfrac{1}{2}$ とおくとこの問題の解となる。

最初に記号を定義しておく。α と自然数 n に対し $\dbinom{\alpha}{n}=\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)$ と書くことにする。$f'(x)=\alpha(1+x)^{\alpha-1}, f''(x)=\alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha 2}$ なので

$$f^{(n)}(x)=\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n}$$

と予想される。ここでは数学的帰納法による証明は省略する。

$$\frac{1}{n!}f^{(n)}(0)=\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}=\binom{\alpha}{n}$$

なのでテーラー級数は

$$f(x)=1+\binom{\alpha}{1}x+\binom{\alpha}{2}x^2+\cdots+\binom{\alpha}{n}x^n+\cdots$$

となる。

(4) 前問までと同様に解いてもよいが，ここでは (2) の結果を利用して解く。$g(x)=\dfrac{1}{1-x}$ とおくと (2) より

$$g(x)=1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots$$

が成立した。$f(x)=g(-x)$ なので

$$\begin{aligned} f(x) &= g(-x)=1+(-x)+(-x)^2+\cdots+(-x)^n+\cdots \\ &= 1-x+x^2+\cdots+(-1)^n x^n+\cdots \end{aligned}$$

となる。

(5) (3) でと同様に解いてもよいが，ここでは (4) の結果を利用して解く。$g(x)=\dfrac{1}{1+x}$ とおくと (4) より

$$g(x)=1-x+x^2+\cdots+(-1)^n x^n+\cdots$$

が成立した。$f(x)=g(x^2)$ なので

$$\begin{aligned} f(x) &= g(x^2)=1-(x^2)+(x^2)^2+\cdots+(-1)^n(x^2)^n+\cdots \\ &= 1-x^2+x^4+\cdots+(-1)^n x^{2n}+\cdots \end{aligned}$$

となる。

演習問題 1.17　次の関数を $x=a$ でテーラー (級数) 展開せよ (テーラー展開可能であることは仮定してよい)。

(1) $f(x)=x^5 \quad (a=1)$　　(2) $f(x)=e^x \quad (a=1)$

(3) $f(x)=\sin x \quad (a=\pi)$　　(4) $f(x)=\log x \quad (a=1)$

(1) $f'(x)=5x^4, f''(x)=20x^3, f'''(x)=60x^2, f^{(4)}(x)=120x, f^{(5)}(x)=120, f^{(n)}(x)=0\ (n>5)$ なので

$$f(x)=1+5(x-1)+10(x-1)^2+10(x-1)^3+5(x-1)^4+(x-1)^5$$

となる。

別解：$f(x)=(1+(x-1))^5$ を展開して

$$f(x)=1+5(x-1)+10(x-1)^2+10(x-1)^3+5(x-1)^4+(x-1)^5$$

となる。

(2) $f^{(n)}(x)=e^x$ なので

$$f(x)=e+e(x-1)+\frac{1}{2!}e(x-1)^2+\cdots+\frac{1}{n!}e(x-1)^n+\cdots$$

となる。

(3) $f^{(2k)}(x)=(-1)^k\sin x, f^{(2k+1)}(x)=(-1)^k\cos x$ となるので (証明省略)，$f^{(2k)}(\pi)=0, f^{(2k+1)}(\pi)=(-1)^k\cos\pi=(-1)^{k+1}$ となる。よって

$$f(x)=-(x-\pi)+\frac{1}{3!}(x-\pi)^3-\frac{1}{5!}(x-\pi)^5+\cdots+(-1)^{k+1}\frac{1}{(2k+1)!}(x-\pi)^{2k+1}+\cdots$$

となる。

(4) $f^(n)(x)$ は演習問題 1.16 (1) と同様に計算すると，$f^{(n)}(x)=(-1)^{n+1}\dfrac{(n-1)!}{x^n}$ であることが分かる。よって

$$f(x)=(x-1)-\frac{1}{2}(x-1)^2+\cdots+(-1)^{n+1}\frac{1}{n}(x-1)^n+\cdots$$

となる。