数理解析 I 問題解説 #8

河野

演習問題 2.1　上の関数が原点において連続でない事を示せ。また原点における偏導関数を求めよ

この問題は講義ですでに解説しましたが，書いておきましょう。

$z = f(x,y)$ が原点において連続であるとは $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0)$ が成立することである。原点で連続でないことを示すには，この極限が存在しないか，存在しても $f(0,0) = 0$ でないことを示せばよい。

$x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ とおいて極座標で考える。$(x,y) \to (0,0)$ と $r \to 0$ は同値である。$f(x,y) = \dfrac{r\cos\theta r\sin\theta}{r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta} = \dfrac{r^2\cos\theta\sin\theta}{r^2} = \cos\theta\sin\theta$ となるので極限値は θ に依存する。たとえば $\theta = 0$ のときは 0 であるが $\theta = \dfrac{\pi}{4}$ のときは $\dfrac{1}{2}$ である。2 変数の極限の定義よりこれは収束しない。よって $f(x,y)$ は $(0,0)$ で連続ではない。

x に関する偏導関数の定義は $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h}$ なので定義にしたがって計算する。

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0,0)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{h\times 0}{h^2+0^2}-0}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} 0 = 0
\end{aligned}$$

となる。y に関する偏導関数も同様に計算できて $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$ となる。

演習問題 2.2　演習問題 2.1 の関数は原点で全微分可能でない事を示せ。

この問題も講義ですでに解説しましたが，書いておきましょう。

$$\begin{aligned}
\varepsilon(h,k) &= \frac{f(0+h,0+k)-f(0,0)-\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)h-\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)k}{\sqrt{h^2+k^2}} \\
&= \frac{\dfrac{hk}{h^2+k^2}-0-0\times h-0\times k}{\sqrt{h^2+k^2}} \\
&= \frac{hk}{(h^2+k^2)\sqrt{h^2+k^2}}
\end{aligned}$$

となる。$x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ とおいて極座標に直すと

$$\varepsilon(h,k) = \frac{r\cos\theta r\sin\theta}{r^2\sqrt{r^2}} = \frac{r^2\cos\theta\sin\theta}{r^3} = \frac{\cos\theta\sin\theta}{r}$$

となる。$r\to 0$ のとき $\varepsilon(h,k)\to 0$ とならないので，$f(x,y)$ は $(0,0)$ で微分可能ではない。

演習問題 2.3　次の関数の偏導関数を求めよ。

(1) $z = x^3 - 3xy + y^3$　(2) $z = (x^3 + y^4)^{100}$

(3) $z = \dfrac{x-y}{2x+3y}$　(4) $z = \sqrt{x^2+y^2}$

(5) $e^{ax^2+by^2}$　(6) $z = x \arctan \dfrac{x}{y}$

(7) $z = xy\sin(x^2+y^2)$　(8) $z = x^2y^2\log(x^3+y^3)$

(9) $z = xy \arcsin \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$　(10) $z = x^x y^y x^y y^x$

x に関する偏導関数というのは，y を定数として x に関しする 1 変数関数と考えて微分したものである。このことを理解していればこの問題は 1 変数の導関数を求める問題になる。1 変数関数の導関数を求められない人はかなりやばい!早急に学習しておくこと。ここでは (7) と (10) のみ解説しておく。

(7) 積の導関数より

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(xy)\sin(x^2+y^2) + xy\frac{\partial}{\partial x}\sin(x^2+y^2)$$

となる。$\dfrac{\partial}{\partial x}(xy) = y$ となる。$\dfrac{\partial}{\partial x}\sin(x^2+y^2)$ を計算するため $u = x^2+y^2, w = \sin u$ とおく。今 y は固定して定数と考えているので，1 変数の合成関数の導関数に関する定理 $\dfrac{dw}{dx} = \dfrac{dw}{du}\dfrac{du}{dx}$ が使える。$\dfrac{dw}{du} = \cos u, \dfrac{du}{dx} = 2x$ なので $\dfrac{dw}{dx} = \cos u \times 2x = 2x\cos(x^2+y^2)$ となる。よって

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y\sin(x^2+y^2) + 2x^2y\cos(x^2+y^2)$$

となる。y に関する偏導関数も同様に計算すると

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x\sin(x^2+y^2) + 2xy^2\cos(x^2+y^2)$$

となる。

(10) x^x の微分は 1 変数の演習問題で「対数微分」を用いて計算した。ここでもう一度確認しておく。$u = x^x$ を x で微分することを考える。$\log u = \log x^x = x\log x$ なので両辺を x で微分すると $\dfrac{du}{dx}\dfrac{d}{du}\log u = \log x + x\dfrac{1}{x} = \log x + 1$ となる。$\dfrac{d}{du}\log u = \dfrac{1}{u}$ なので

$$\frac{du}{dx} = u(\log x + 1) = x^x(\log x + 1)$$

となる。

x に関する偏導関数を求める。x^y は x に関してべき乗関数であり，y^x は x に関して指数関数なので $\dfrac{\partial x^y}{\partial =} yx^{y-1}, \dfrac{\partial y^x}{\partial =} y^x \log y$ となる。3 個の積になっている関数 $w = fgh$ の導関数は積の導関数の定理を 2 度適用して $w' = f'gh + fg'h + fgh'$ となるので

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x}x^x\, y^y x^y y^x + x^x y^y \frac{\partial}{\partial x}x^y\, y^x + x^x y^y x^y \frac{\partial}{\partial x} y^x \\ &= x^x(\log x + 1)y^y x^y y^x + x^x y^y y x^{y-1} x^y + x^x y^y x^y y^x \log y\end{aligned}$$

となる。y に関する偏導関数も同様に計算できる。