

演習問題 2.4 次の場合に $\frac{D(x, y)}{D(u, v)}$ 及び $\frac{D(u, v)}{D(x, y)}$ を求めよ。

- (1) $x = v^2, y = u^2$ (2) $x = u^2 - v^2, y = 2uv$
 (3) $x = u \cos v, y = u \sin v$ (4) $x = u, y = u + v$

$\frac{D(u, v)}{D(x, y)}$ を直接求めることは難しいので、最初に $\frac{D(x, y)}{D(u, v)}$ を求めて、逆行列を求めることにより、 $\frac{D(u, v)}{D(x, y)}$ を求める。ヤコビ行列は変数の順序が変わると別のヤコビ行列になる。順序を間違えないこと。 $\frac{D(x, y)}{D(u, v)}$ でいうと、独立変数が左から右へ u, v 、従属変数は縦に x, y となる。

- (1) $\frac{\partial x}{\partial u} = 0, \frac{\partial x}{\partial v} = 2v, \frac{\partial y}{\partial u} = 2u, \frac{\partial y}{\partial v} = 0$ なので

$$\frac{D(x, y)}{D(u, v)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2v \\ 2u & 0 \end{pmatrix}$$

となる。 $\frac{D(u, v)}{D(x, y)}$ は $\frac{D(x, y)}{D(u, v)}$ の逆行列なので

$$\frac{D(u, v)}{D(x, y)} = \left(\frac{D(x, y)}{D(u, v)} \right)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 2v \\ 2u & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2u} \\ \frac{1}{2v} & 0 \end{pmatrix}$$

(2) $\frac{D(x, y)}{D(u, v)} = \begin{pmatrix} 2u & -2v \\ 2v & 2u \end{pmatrix}, \frac{D(u, v)}{D(x, y)} = \frac{1}{2(u^2 + v^2)} \begin{pmatrix} u & v \\ -v & u \end{pmatrix}$

(3) $\frac{D(x, y)}{D(u, v)} = \begin{pmatrix} \cos v & -u \sin v \\ \sin v & u \cos v \end{pmatrix}, \frac{D(u, v)}{D(x, y)} = \begin{pmatrix} \cos v & \sin v \\ -\frac{\sin v}{u} & \frac{\cos v}{u} \end{pmatrix}$

(4) $\frac{D(x, y)}{D(u, v)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \frac{D(u, v)}{D(x, y)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

逆行列の求め方が分からない人へ: $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ の逆行列は $A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ で与えられる。こ

れを忘れたときは次の様に定義に基づいて逆行列を計算できる。 $A^{-1} = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$ とおくと、 $AA^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

より連立 1 次方程式

$$ap + br = 1, aq + bs = 0, cp + dr = 0, cq + ds = 1$$

を得る。これを解くと $p = \frac{d}{ad - bc}, q = \frac{-b}{ad - bc}, r = \frac{-c}{ad - bc}, d = \frac{a}{ad - bc}$ が分かる。

演習問題 2.5 次の関数に対し $\frac{\partial z}{\partial s}, \frac{\partial z}{\partial t}, \frac{\partial^2 z}{\partial s^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial s \partial t}$ を求めよ。

- (1) $z = x + y^2, s = x + y, t = xy$ (2) $z = x + y, s = x^2 + y^2, t = x^2 y^2$
 (3) $z = x + y, s = x^2 + y^2, t = xy$ (4) $z = x + y, s = x^2 - y^2, t = 2xy$

(5) $z = xy, s = x, t = x + y$

(6) $z = xy, s = x \cos y, t = x \sin y$

(1) $\frac{D(s, t)}{D(x, y)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ y & x \end{pmatrix}$ である。 $\frac{D(x, y)}{D(s, t)}$ は $\frac{D(x, y)}{D(s, t)}$ の逆行列なので

$$\frac{D(x, y)}{D(s, t)} = \begin{pmatrix} \frac{x}{x-y} & -\frac{1}{x-y} \\ -\frac{y}{x-y} & \frac{1}{x-y} \end{pmatrix}$$

となる。一方 $\frac{D(z)}{D(x, y)} = (1 \ 2y)$ であり、 $\begin{pmatrix} \frac{\partial z}{\partial s} & \frac{\partial z}{\partial t} \end{pmatrix} = \frac{D(z)}{D(s, t)} = \frac{D(z)}{D(x, y)} \frac{D(x, y)}{D(s, t)}$ なので

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial z}{\partial s} & \frac{\partial z}{\partial t} \end{pmatrix} = \frac{D(z)}{D(s, t)} = \begin{pmatrix} \frac{x-2y^2}{x-y} & \frac{-1+2y}{x-y} \end{pmatrix}$$

である。また

$$\frac{D(z_s, z_t)}{D(x, y)} = \begin{pmatrix} \frac{y(-1+2y)}{(x-y)^2} & -\frac{4xy-2y^2-x}{(x-y)^2} \\ -\frac{-1+2y}{(x-y)^2} & \frac{2x-1}{(x-y)^2} \end{pmatrix}$$

が成立している。 $\begin{pmatrix} z_{ss} & z_{st} \\ z_{ts} & z_{tt} \end{pmatrix} = \frac{D(z_s, z_t)}{D(s, t)} = \frac{D(z_s, z_t)}{D(x, y)} \frac{D(x, y)}{D(s, t)}$ に代入して

$$\begin{pmatrix} z_{ss} & z_{st} \\ z_{ts} & z_{tt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2y(-x+3xy-y^2)}{(x-y)^3} & -\frac{-x+4xy-y}{(x-y)^3} \\ -\frac{-x+4xy-y}{(x-y)^3} & \frac{2(-1+y+x)}{(x-y)^3} \end{pmatrix}$$

を得る。

(2) $\frac{D(s, y)}{D(x, y)} = \begin{pmatrix} 2x & 2y \\ 2xy^2 & 2x^2y \end{pmatrix}$ である。 $\frac{D(x, y)}{D(s, t)}$ は $\frac{D(x, y)}{D(s, t)}$ の逆行列なので

$$\frac{D(x, y)}{D(s, t)} = \begin{pmatrix} \frac{x}{2(x^2-y^2)} & -\frac{1}{2x(x^2-y^2)} \\ -\frac{y}{2(x^2-y^2)} & \frac{1}{2y(x^2-y^2)} \end{pmatrix}$$

となる。一方 $\frac{D(z)}{D(x, y)} = (1 \ 1)$ であり、 $\begin{pmatrix} \frac{\partial z}{\partial s} & \frac{\partial z}{\partial t} \end{pmatrix} = \frac{D(z)}{D(s, t)} = \frac{D(z)}{D(x, y)} \frac{D(x, y)}{D(s, t)}$ なので

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial z}{\partial s} & \frac{\partial z}{\partial t} \end{pmatrix} = \frac{D(z)}{D(s, t)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2(x+y)} & \frac{1}{2(x+y)xy} \end{pmatrix}$$

である。また

$$\frac{D(z_s, z_t)}{D(x, y)} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2(x+y)^2} & -\frac{1}{2(x+y)^2} \\ -\frac{2x+y}{2(x+y)^2 x^2 y} & -\frac{2y+x}{2(x+y)^2 x y^2} \end{pmatrix}$$

が成立している。 $\begin{pmatrix} z_{ss} & z_{st} \\ z_{ts} & z_{tt} \end{pmatrix} = \frac{D(z_s, z_t)}{D(s, t)} = \frac{D(z_s, z_t)}{D(x, y)} \frac{D(x, y)}{D(s, t)}$ に代入して

$$\begin{pmatrix} z_{ss} & z_{st} \\ z_{ts} & z_{tt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4(x+y)^3} & -\frac{1}{4(x+y)^3 xy} \\ -\frac{1}{4(x+y)^3 xy} & -\frac{x^2 + 3xy + y^2}{4(x+y)^3 y^3 x^3} \end{pmatrix}$$

を得る。

(3) $\frac{D(s, y)}{D(x, y)} = \begin{pmatrix} 2x & 2y \\ y & x \end{pmatrix}$ である。 $\frac{D(x, y)}{D(s, t)}$ は $\frac{D(x, y)}{D(s, t)}$ の逆行列なので

$$\frac{D(x, y)}{D(s, t)} = \begin{pmatrix} \frac{x}{2(x^2 - y^2)} & -\frac{y}{x^2 - y^2} \\ -\frac{y}{2(x^2 - y^2)} & \frac{x}{x^2 - y^2} \end{pmatrix}$$

となる。一方 $\frac{D(z)}{D(x, y)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}$ であり、 $\begin{pmatrix} \frac{\partial z}{\partial s} & \frac{\partial z}{\partial t} \end{pmatrix} = \frac{D(z)}{D(s, t)} = \frac{D(z)}{D(x, y)} \frac{D(x, y)}{D(s, t)}$ なので

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial z}{\partial s} & \frac{\partial z}{\partial t} \end{pmatrix} = \frac{D(z)}{D(s, t)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2(x+y)} & \frac{1}{x+y} \end{pmatrix}$$

である。また

$$\frac{D(z_s, z_t)}{D(x, y)} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2(x+y)^2} & -\frac{1}{2(x+y)^2} \\ -\frac{1}{(x+y)^2} & -\frac{1}{(x+y)^2} \end{pmatrix}$$

が成立している。 $\begin{pmatrix} z_{ss} & z_{st} \\ z_{ts} & z_{tt} \end{pmatrix} = \frac{D(z_s, z_t)}{D(s, t)} = \frac{D(z_s, z_t)}{D(x, y)} \frac{D(x, y)}{D(s, t)}$ に代入して

$$\begin{pmatrix} z_{ss} & z_{st} \\ z_{ts} & z_{tt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4(x+y)^3} & -\frac{1}{2(x+y)^3} \\ -\frac{1}{2(x+y)^3} & -\frac{1}{(x+y)^3} \end{pmatrix}$$

を得る。

(4) $\frac{D(s, y)}{D(x, y)} = \begin{pmatrix} 2x & -2y \\ 2y & 2x \end{pmatrix}$ である。 $\frac{D(x, y)}{D(s, t)}$ は $\frac{D(x, y)}{D(s, t)}$ の逆行列なので

$$\frac{D(x, y)}{D(s, t)} = \begin{pmatrix} \frac{x}{2(x^2 + y^2)} & \frac{y}{2(x^2 + y^2)} \\ -\frac{y}{2(x^2 + y^2)} & \frac{x}{2(x^2 + y^2)} \end{pmatrix}$$

となる。一方 $\frac{D(z)}{D(x, y)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}$ であり、 $\begin{pmatrix} \frac{\partial z}{\partial s} & \frac{\partial z}{\partial t} \end{pmatrix} = \frac{D(z)}{D(s, t)} = \frac{D(z)}{D(x, y)} \frac{D(x, y)}{D(s, t)}$ なので

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial z}{\partial s} & \frac{\partial z}{\partial t} \end{pmatrix} = \frac{D(z)}{D(s, t)} = \begin{pmatrix} \frac{x-y}{2(x^2 + y^2)} & \frac{x+y}{2(x^2 + y^2)} \end{pmatrix}$$

である。また

$$\frac{D(z_s, z_t)}{D(x, y)} = \begin{pmatrix} -\frac{x^2 - y^2 - 2xy}{2(x^2 + y^2)^2} & -\frac{x^2 - y^2 + 2xy}{2(x^2 + y^2)^2} \\ -\frac{x^2 - y^2 + 2xy}{2(x^2 + y^2)^2} & \frac{x^2 - y^2 - 2xy}{2(x^2 + y^2)^2} \end{pmatrix}$$

が成立している。 $\begin{pmatrix} z_{ss} & z_{st} \\ z_{ts} & z_{tt} \end{pmatrix} = \frac{D(z_s, z_t)}{D(s, t)} = \frac{D(z_s, z_t)}{D(x, y)} \frac{D(x, y)}{D(s, t)}$ に代入して

$$\begin{pmatrix} z_{ss} & z_{st} \\ z_{ts} & z_{tt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3x^2y + y^3 - 3xy^2 + x^3}{4(x^2 + y^2)^3} & -\frac{3x^2y - y^3 - 3xy^2 + x^3}{4(x^2 + y^2)^3} \\ -\frac{3x^2y - y^3 - 3xy^2 + x^3}{4(x^2 + y^2)^3} & \frac{-3x^2y + y^3 - 3xy^2 + x^3}{4(x^2 + y^2)^3} \end{pmatrix}$$

を得る。

(5) $\frac{D(s, y)}{D(x, y)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ である。 $\frac{D(x, y)}{D(s, t)}$ は $\frac{D(x, y)}{D(s, t)}$ の逆行列なので

$$\frac{D(x, y)}{D(s, t)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

となる。一方 $\frac{D(z)}{D(x, y)} = \begin{pmatrix} y & x \end{pmatrix}$ であり、 $\left(\frac{\partial z}{\partial s} \quad \frac{\partial z}{\partial t}\right) = \frac{D(z)}{D(s, t)} = \frac{D(z)}{D(x, y)} \frac{D(x, y)}{D(s, t)}$ なので

$$\left(\frac{\partial z}{\partial s} \quad \frac{\partial z}{\partial t}\right) = \frac{D(z)}{D(s, t)} = \begin{pmatrix} y - x & x \end{pmatrix}$$

である。また

$$\frac{D(z_s, z_t)}{D(x, y)} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

が成立している。 $\begin{pmatrix} z_{ss} & z_{st} \\ z_{ts} & z_{tt} \end{pmatrix} = \frac{D(z_s, z_t)}{D(s, t)} = \frac{D(z_s, z_t)}{D(x, y)} \frac{D(x, y)}{D(s, t)}$ に代入して

$$\begin{pmatrix} z_{ss} & z_{st} \\ z_{ts} & z_{tt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

を得る。

(6) $\frac{D(s, y)}{D(x, y)} = \begin{pmatrix} \cos y & -x \sin y \\ \sin y & x \cos y \end{pmatrix}$ である。 $\frac{D(x, y)}{D(s, t)}$ は $\frac{D(x, y)}{D(s, t)}$ の逆行列なので

$$\frac{D(x, y)}{D(s, t)} = \begin{pmatrix} \cos y & \sin y \\ -\frac{\sin y}{x} & \frac{\cos y}{x} \end{pmatrix}$$

となる。一方 $\frac{D(z)}{D(x, y)} = \begin{pmatrix} y & x \end{pmatrix}$ であり、 $\left(\frac{\partial z}{\partial s} \quad \frac{\partial z}{\partial t}\right) = \frac{D(z)}{D(s, t)} = \frac{D(z)}{D(x, y)} \frac{D(x, y)}{D(s, t)}$ なので

$$\left(\frac{\partial z}{\partial s} \quad \frac{\partial z}{\partial t}\right) = \frac{D(z)}{D(s, t)} = \begin{pmatrix} y \cos y - \sin y & y \sin y + \cos y \end{pmatrix}$$

である。また

$$\frac{D(z_s, z_t)}{D(x, y)} = \begin{pmatrix} 0 & -y \sin y \\ 0 & y \cos y \end{pmatrix}$$

が成立している。 $\begin{pmatrix} z_{ss} & z_{st} \\ z_{ts} & z_{tt} \end{pmatrix} = \frac{D(z_s, z_t)}{D(s, t)} = \frac{D(z_s, z_t)}{D(x, y)} \frac{D(x, y)}{D(s, t)}$ に代入して

$$\begin{pmatrix} z_{ss} & z_{st} \\ z_{ts} & z_{tt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{y \sin^2 y}{x} & -\frac{y \sin y \cos y}{x} \\ -\frac{y \sin y \cos y}{x} & \frac{y \cos^2 y}{x} \end{pmatrix}$$

を得る。

演習問題 2.6 $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ とする (2次元の極座標表示)。ヤコビ行列 $\frac{D(x, y)}{D(r, \theta)}$ およびヤコビアン

$\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)}$ を計算し、関数 $z = f(x, y)$ に対し次を示せ。

$$(1) \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2$$

$$(2) \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2}$$

ヤコビ行列は $\frac{D(x, y)}{D(r, \theta)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix}$ である。 $\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} = \det \frac{D(x, y)}{D(r, \theta)}$ なので

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} = \cos \theta \times r \cos \theta - (-r \sin \theta) \times \sin \theta = r(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = r$$

である。

$$(1) \frac{\partial z}{\partial r} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r}, \frac{\partial z}{\partial \theta} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \theta} \text{ なるので}$$

$$\frac{\partial z}{\partial r} = \frac{\partial z}{\partial x} \cos \theta + \frac{\partial z}{\partial y} \sin \theta, \quad \frac{\partial z}{\partial \theta} = -\frac{\partial z}{\partial x} r \sin \theta + \frac{\partial z}{\partial y} r \cos \theta \quad (1)$$

となる。よって

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2 &= \left(\frac{\partial z}{\partial x} \cos \theta + \frac{\partial z}{\partial y} \sin \theta\right)^2 + \left(-\frac{\partial z}{\partial x} \sin \theta + \frac{\partial z}{\partial y} \cos \theta\right)^2 \\ &= \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 \cos^2 \theta + 2 \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y} \cos \theta \sin \theta + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 \sin^2 \theta \\ &\quad + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 \sin^2 \theta - 2 \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y} \cos \theta \sin \theta + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 \cos^2 \theta \\ &= \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 \end{aligned}$$

となる。

(2) 式 (1) より

$$\frac{\partial^2 z}{\partial r^2} = \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial z}{\partial r} \right) = \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \cos \theta + \frac{\partial z}{\partial y} \sin \theta \right) = \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) \cos \theta + \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) \sin \theta$$

となるが,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) \frac{\partial y}{\partial r} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \cos \theta + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \sin \theta \\ \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) \frac{\partial y}{\partial r} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \cos \theta + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \sin \theta \end{aligned}$$

を代入して

$$\frac{\partial^2 z}{\partial r^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \cos^2 \theta + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \cos \theta \sin \theta + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \sin^2 \theta$$

を得る。計算の途中で $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ を使った。

同様に式 (1) より

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2} &= \frac{\partial}{\partial \theta} \left(-\frac{\partial z}{\partial x} r \sin \theta + \frac{\partial z}{\partial y} r \cos \theta \right) \\ &= -\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) r \sin \theta - \frac{\partial z}{\partial x} r \cos \theta + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) r \cos \theta - \frac{\partial z}{\partial y} r \sin \theta \end{aligned}$$

となるが,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) \frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) \frac{\partial y}{\partial \theta} = -\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} r \sin \theta + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} r \cos \theta \\ \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) \frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) \frac{\partial y}{\partial \theta} = -\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} r \sin \theta + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} r \cos \theta \end{aligned}$$

を代入して

$$\frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} r^2 \sin^2 \theta - 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} r^2 \sin \theta \cos \theta + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} r^2 \cos^2 \theta - \frac{\partial z}{\partial x} r \cos \theta - \frac{\partial z}{\partial y} r \sin \theta$$

を得る。よって

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2} &= \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) - \frac{1}{r} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \cos \theta + \frac{\partial z}{\partial y} \sin \theta \right) \\ &= \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial z}{\partial r} \end{aligned}$$

を得る。

演習問題 2.7

(1) $x = u \cos \alpha - v \sin \alpha, y = u \sin \alpha + v \cos \alpha$ (α は定数) のとき次を示せ。

1) $z_x^2 + z_y^2 = z_u^2 + z_v^2$

2) $z_{xx} + z_{yy} = z_{uu} + z_{vv}$

(2) $x + y = e^{u+v}, x - y = e^{u-v}$ に対し $z_{xx} - z_{yy} = e^{-2u}(z_{uu} - z_{vv})$ が成立することを示せ。

(3) $x + y = u, y = uv$ ならば $xz_{xx} + yz_{xy} + z_x = uz_{uu} - vz_{uv} + z_u$ となる事を示せ。

(1) x を u で微分すると $x_u = \cos \alpha, v$ で微分すると $x_v = -\sin \alpha$ を得る。同様に $y_u = \sin \alpha, y_v = \cos \alpha$ となる。合成関数の微分法より

$$z_u = z_x x_u + z_y y_u$$

$$z_v = z_x x_v + z_y y_v$$

が得られる。これを用いて $z_u^2 + z_v^2$ を計算すると

$$\begin{aligned} z_u^2 + z_v^2 &= (z_x \cos \alpha - z_y \sin \alpha)^2 + (z_x \sin \alpha + z_y \cos \alpha)^2 \\ &= z_x^2 \cos^2 \alpha - 2z_x z_y \cos \alpha \sin \alpha + z_y^2 \sin^2 \alpha + z_x^2 + 2z_x z_y \sin \alpha \cos \alpha + z_y^2 \cos^2 \alpha \\ &= z_x^2 (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) + z_y^2 (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) \\ &= z_x^2 + z_y^2 \end{aligned}$$

となる。

$z_u = z_x x_u + z_y y_u$ を u で微分すると、積の微分法より

$$(z_u)_u = (z_x)_u x_u + z_x (x_u)_u + (z_y)_u y_u + z_y (y_u)_u$$

となる。 x_u, y_u は定数なので $(x_u)_u = 0, (y_u)_u = 0$ である。また $(z_x)_u, (z_y)_u$ に合成関数の微分法をもう一度適用すると、 $(z_x)_u = (z_x)_x x_u + (z_x)_y y_u, (z_y)_u = (z_y)_x x_u + (z_y)_y y_u$ となる。よってこれらを前式に代入すると

$$z_{uu} = z_{xx} x_u^2 + 2z_{xy} x_u y_u + z_{yy} y_u^2 = z_{xx} \cos^2 \alpha + 2z_{xy} \cos \alpha \sin \alpha + z_{yy} \sin^2 \alpha$$

が得られる。ただし計算途中で $z_{xy} = z_{yx}$ を使用した。同様に z_{vv} を計算すると

$$z_{vv} = z_{xx} \sin^2 \alpha - 2z_{xy} \cos \alpha \sin \alpha + z_{yy} \cos^2 \alpha$$

となり、これらを加えると

$$z_{uu} + z_{vv} = z_{xx} (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) + z_{yy} (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) = z_{xx} + z_{yy}$$

となる。

(2) $x = \frac{e^{u+v} + e^{u-v}}{2}, y = \frac{e^{u+v} - e^{u-v}}{2}$ なので

$$\frac{D(x, y)}{D(u, v)} = \begin{pmatrix} x & y \\ y & x \end{pmatrix}$$

となる。

$$z_u = z_x x_u + z_y y_u = z_x x + z_y y$$

を u で微分すると

$$\begin{aligned}
 z_{uu} &= \frac{\partial}{\partial u} (z_x x) + \frac{\partial}{\partial u} (z_y y) \\
 &= (z_x)_u x + z_x x_u + (z_y)_u y + z_y y_u \\
 &= (z_{xx} x_u + z_{xy} y_u) x + z_x x + (z_{yx} x_u + z_{yy} y_u) y + z_y y \\
 &= z_{xx} x^2 + 2z_{xy} xy + z_{yy} y^2 + z_x x + z_y y
 \end{aligned}$$

となる。

$$z_v = z_x x_v + z_y y_v = z_x y + z_y x$$

を v で微分すると

$$\begin{aligned}
 z_{vv} &= (z_x)_v y + z_x y_v + (z_y)_v x + z_y x_v \\
 &= (z_{xx} x_v + z_{xy} y_v) y + z_x x + (z_{yx} x_v + z_{yy} y_v) x + z_y y \\
 &= z_{xx} y^2 + 2z_{xy} xy + z_{yy} x^2 + z_x x + z_y y
 \end{aligned}$$

となる。よって $z_{uu} - z_v v = (z_{xx} - z_{yy})(x^2 - y^2)$ となるが、 $x^2 - y^2 = e^{2u}$ なるので式が証明された。

(3) $x = u - y = u - uv$ なるので

$$\frac{D(x, y)}{D(u, v)} = \begin{pmatrix} 1 - v & -u \\ v & u \end{pmatrix}$$

である。

$$z_u = z_x x_u + z_y y_u = z_x(1 - v) + z_y v$$

を u で微分すると

$$\begin{aligned}
 z_{uu} &= (z_u)_u (1 - v) + (z_y)_u v \\
 &= (z_{xx} x_u + z_{xy} y_u) (1 - v) + (z_{yx} x_u + z_{yy} y_u) v \\
 &= z_{xx} (1 - v)^2 + 2z_{xy} u (1 - v) + z_{yy} v^2
 \end{aligned}$$

であり、 z_u を v で微分すると

$$\begin{aligned}
 z_{uv} &= (z_x)_v (1 - v) + z_x (1 - v)_v + (z_y)_v v + z_y v_v \\
 &= (z_{xx} x_v + z_{xy} y_v) (1 - v) - z_x + (z_{yx} x_v + z_{yy} y_v) v + z_y \\
 &= -z_{xx} u (1 - v) + z_{xy} u (1 - v) - z_{xy} uv + z_{yy} uv - z_x + z_y
 \end{aligned}$$

となる。よって

$$\begin{aligned}
 uz_{uu} - vz_{uv} + z_u &= z_{xx} u (1 - v)^2 + 2z_{xy} uv (1 - v) + z_{yy} uv^2 + z_{xx} uv (1 - v) - z_{xy} uv (1 - v) \\
 &\quad + z_{xy} uv^2 - z_{yy} uv^2 + z_x v - z_y v + z_x (1 - v) + z_y v \\
 &= z_{xx} u (1 - v) + z_{xy} uv + z_x \\
 &= xz_{xx} + yz_{yy} + z_x
 \end{aligned}$$

が得られる。

演習問題 2.8 次の関数の偏導関数を求めよ。

- (1) $w = f(x, y, z) = x^2 y^3 z^4$ (2) $w = xyz \sin(x^2 + y^2 + z^2)$
 (3) $e^{x^2 + y^3 + z^4}$ (4) $x^2 y^3 \log(x^2 + y^3 + z^4)$

この問題に解説は不必要でしょう。この問題を解けない人は早急に その状態を脱する事!

演習問題 2.9 次の場合に $\frac{D(x, y, z)}{D(u, v, w)}$ 及び $\frac{D(u, v, w)}{D(x, y, z)}$ を求めよ。

- (1) $x = v^2, y = w^2, z = u^2$ (2) $x = u^2 - v^2 + w^2, y = 2uv, z = 2vw$
 (3) $x = u \cos v, y = u \sin v, z = u + w$ (4) $x = u, y = u + v, z = u + v + w$

3 次行列の逆行列を求める部分を除けば問題は解けると思います。

(1)

$$\frac{D(x, y, z)}{D(u, v, w)} = \begin{pmatrix} x_u & x_v & x_w \\ y_u & y_v & y_w \\ z_u & z_v & z_w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2v & 0 \\ 0 & 0 & 2w \\ 2u & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(1) のみ逆行列を求める計算を記す。逆行列を $B = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ とおくと

$$\begin{pmatrix} 0 & 2v & 0 \\ 0 & 0 & 2w \\ 2u & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

となるので、 $a, b, c, d, e, f, g, h, i$ は連立 1 次方程式

$$2vd = 1, 2ve = 0, 2vf = 0, 2wg = 0, 2wh = 1, 2wi = 0, 2ua = 0, 2ub = 0, 2uc = 1$$

の解なので

$$a = 0, b = 0, c = \frac{1}{2u}, d = \frac{1}{2v}, e = 0, f = 0, g = 0, h = \frac{1}{2w}, i = 0$$

となる (ここで $u \neq 0, v \neq 0, w \neq 0$ として計算した)。線形解析で学ぶ 3 次行列の逆行列の計算方法を知っているものはそれを用いて計算しても、勿論よい。よって

$$\frac{D(u, v, w)}{D(x, y, z)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2u} \\ \frac{1}{2v} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2w} & 0 \end{pmatrix}$$

である。

(2)

$$\frac{D(x, y, z)}{D(u, v, w)} = \begin{pmatrix} x_u & x_v & x_w \\ y_u & y_v & y_w \\ z_u & z_v & z_w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2u & -2v & 0 \\ 2v & 2u & 0 \\ 0 & 2w & 2v \end{pmatrix}$$

なので

$$\frac{D(u, v, w)}{D(x, y, z)} = \begin{pmatrix} \frac{u}{2(u^2 + v^2)} & \frac{v}{2(u^2 + v^2)} & 0 \\ -\frac{v}{2(u^2 + v^2)} & \frac{u}{2(u^2 + v^2)} & 0 \\ \frac{w}{2(u^2 + v^2)} & -\frac{wu}{2v(u^2 + v^2)} & \frac{1}{2v} \end{pmatrix}$$

である。

(3)

$$\frac{D(x, y, z)}{D(u, v, w)} = \begin{pmatrix} x_u & x_v & x_w \\ y_u & y_v & y_w \\ z_u & z_v & z_w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos v & -u \sin v & 0 \\ \sin v & u \cos v & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

なので

$$\frac{D(u, v, w)}{D(x, y, z)} = \begin{pmatrix} \cos v & \sin v & 0 \\ -\frac{\sin v}{u} & \frac{\cos v}{u} & 0 \\ -\cos v & -\sin v & 1 \end{pmatrix}$$

である。

(4)

$$\frac{D(x, y, z)}{D(u, v, w)} = \begin{pmatrix} x_u & x_v & x_w \\ y_u & y_v & y_w \\ z_u & z_v & z_w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

なので

$$\frac{D(u, v, w)}{D(x, y, z)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

である。

演習問題 2.10 次の関数に対し $\frac{\partial w}{\partial s}, \frac{\partial w}{\partial t}, \frac{\partial w}{\partial u}, \frac{\partial^2 w}{\partial s^2}, \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \frac{\partial^2 w}{\partial u^2}, \frac{\partial^2 w}{\partial s \partial t}$ を求めよ。

(1) $w = x + y^2 + z^3, x + y + z = s, xy + yz + zx = t, xyz = u$

(2) $w = x + y + z, x^2 + y^2 + z^2 = s, xy^2z = t, xy + yz + zx = u$

(1) この問題はタイプミスで計算が少々²面倒な問題になってしまいました。根性のある人はがんばってください。ない人は $w = x^3 + y^3 + z^3$ と変更して計算してください。解説は元の問題です。

$$\frac{D(s, t, u)}{D(x, y, z)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ y + z & x + z & x + y \\ yz & zx & xy \end{pmatrix}$$

なので

$$\frac{D(x, y, z)}{D(s, t, u)} = \begin{pmatrix} \frac{x^2}{-xy + yz + x^2 - zx} & -\frac{x}{-xy + yz + x^2 - zx} & \frac{1}{-xy + yz + x^2 - zx} \\ -\frac{y^2}{xy - zx - y^2 + yz} & \frac{y}{xy - zx - y^2 + yz} & -\frac{1}{xy - zx - y^2 + yz} \\ \frac{z^2}{xy - zx - yz + z^2} & -\frac{z}{xy - zx - yz + z^2} & \frac{1}{xy - zx - yz + z^2} \end{pmatrix}$$

となる。

$$\frac{D(w)}{D(x, y, z)} = \begin{pmatrix} 1 & 2y & 3z^2 \end{pmatrix}$$

なので

$$\begin{aligned} \frac{D(w)}{D(s, t, u)} &= \frac{D(w)}{D(x, y, z)} \frac{D(x, y, z)}{D(s, t, u)} \\ &= \left(\frac{2y^3z - 2y^3x + x^2y - 3z^4y - zx^2 + 3z^4x}{(xy - zx - yz + z^2)(x - y)}, \frac{-2y^2z + 2xy^2 - xy + 3yz^3 + zx - 3z^3x}{(xy - zx - yz + z^2)(x - y)}, \right. \\ &\quad \left. -\frac{2xy - y - 2yz + 3yz^2 + z - 3z^2x}{(xy - zx - yz + z^2)(x - y)} \right) \end{aligned}$$

となる。これを微分すると

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial s} &= \frac{2x^2y^3 + 2y^3z^2 - 4xy^3z - 3z^4y^2 - x^2y^2 + 2xy^2z - 2xyz^2 + 6z^4xy - 3z^4x^2 + z^2x^2}{(x - y)^2(x - z)(xy - zx - yz + z^2)} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial s} &= -\frac{2x^2yz - x^2y^2 + 4x^2y^3 - z^2x^2 + 3z^4x^2 - 6x^2y^2z + 6xy^2z^2 - 2xy^4 - 6z^4xy - 4y^3z^2 + 3z^4y^2 + 2y^4z}{((x - y)^2(y - z)(xy - zx - yz + z^2))} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial z \partial s} &= -\frac{2x^2yz - 4xy^3z + 12z^3xy^2 - 12z^3x^2y - z^2x^2 - x^2y^2 + 2y^3z^2 + 2x^2y^3 - 9z^4y^2 + 6z^5y + 9z^4x^2 - 6xz^5}{(xy - zx - yz + z^2)^2(x - y)} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} &= -\frac{y^2z - 4xy^2z - 3y^2z^3 + 2y^2z^2 + 2x^2y^2 - yz^2 - x^2y + 6yz^3x - 3z^3x^2 + zx^2}{(x - y)^2(x - z)(xy - zx - yz + z^2)} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial t} &= \frac{-4x^2yz + 2x^2y^2 + 3z^3x^2 + 2xyz - 6yz^3x + 4xyz^2 - xy^2 - z^2x + 3y^2z^3 - 2y^2z^2}{(x - y)^2(y - z)(xy - zx - yz + z^2)} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial z \partial t} &= \frac{3z^4y - 4xy^2z - 9yz^2x^2 + 9xy^2z^2 + 2x^2y^2 - xy^2 + 2y^2z^2 - 6y^2z^3 + 6z^3x^2 - 3z^4x + 2xyz - z^2x}{(xy - zx - yz + z^2)^2(x - y)} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial u} &= \frac{y^2 - 3y^2z^2 - 2xy + 2yz^2 + 2x^2y + 6xyz^2 - 4xyz + 2zx - 3z^2x^2 - z^2}{(x - y)^2(x - z)(xy - zx - yz + z^2)} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial u} &= -\frac{3z^2x^2 - 2zx^2 + 2z^2x + 2xy^2 - 6xyz^2 - z^2 - 2y^2z + 2yz - y^2 + 3y^2z^2}{(x - y)^2(y - z)(xy - zx - yz + z^2)} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial z \partial u} &= \frac{6x^2yz - 6xy^2z - 3z^2x^2 + 3y^2z^2 - 2x^2y + y^2 - 2yz + 4xyz - 2yz^2 + z^2}{(xy - zx - yz + z^2)^2(x - y)} \end{aligned}$$

なので,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} &= \frac{(-4xy^3z + 2y^3x^2 + 2y^3z^2 - 3z^4y^2 + 2xy^2z - x^2y^2 + 6xz^4y - 2xyz^2 - 3z^4x^2 + z^2x^2)x^2}{(x-y)^2(x-z)(xy-zx+z^2-yz)(-xy+yz+x^2-zx)} \\ &+ \frac{(4y^3x^2 + 2x^2yz - x^2y^2 - 6x^2y^2z + 3z^4x^2 - z^2x^2 - 2xy^4 - 6xz^4y + 6xy^2z^2 + 2y^4z + 3z^4y^2 - 4y^3z^2)y^2}{(x-y)^2(y-z)(xy-zx+z^2-yz)(xy-zx-y^2+yz)} \\ &- \frac{(2x^2yz - 12x^2yz^3 - x^2y^2 - z^2x^2 - 9z^4y^2 + 6z^5y + 2y^3z^2 - 4xy^3z - 6xz^5 + 12y^2z^3x + 2y^3x^2 + 9z^4x^2)z^2}{(xy-zx+z^2-yz)^3(x-y)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 w}{\partial s \partial t} &= - \frac{(-4xy^3z + 2y^3x^2 + 2y^3z^2 - 3z^4y^2 + 2xy^2z - x^2y^2 + 6xz^4y - 2xyz^2 - 3z^4x^2 + z^2x^2)x}{(x-y)^2(x-z)(xy-zx+z^2-yz)(-xy+yz+x^2-zx)} \\ &- \frac{(4y^3x^2 + 2x^2yz - x^2y^2 - 6x^2y^2z + 3z^4x^2 - z^2x^2 - 2xy^4 - 6xz^4y + 6xy^2z^2 + 2y^4z + 3z^4y^2 - 4y^3z^2)y}{(x-y)^2(y-z)(xy-zx+z^2-yz)(xy-zx-y^2+yz)} \\ &+ \frac{(2x^2yz - 12x^2yz^3 - x^2y^2 - z^2x^2 - 9z^4y^2 + 6z^5y + 2y^3z^2 - 4xy^3z - 6xz^5 + 12y^2z^3x + 2y^3x^2 + 9z^4x^2)z}{(xy-zx+z^2-yz)^3(x-y)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 w}{\partial s \partial u} &= \frac{-4xy^3z + 2y^3x^2 + 2y^3z^2 - 3z^4y^2 + 2xy^2z - x^2y^2 + 6xz^4y - 2xyz^2 - 3z^4x^2 + z^2x^2}{(x-y)^2(x-z)(xy-zx+z^2-yz)(-xy+yz+x^2-zx)} \\ &+ \frac{(4y^3x^2 + 2x^2yz - x^2y^2 - 6x^2y^2z + 3z^4x^2 - z^2x^2 - 2xy^4 - 6xz^4y + 6xy^2z^2 + 2y^4z + 3z^4y^2 - 4y^3z^2)}{(x-y)^2(y-z)(xy-zx+z^2-yz)(xy-zx-y^2+yz)} \\ &- \frac{(2x^2yz - 12x^2yz^3 - x^2y^2 - z^2x^2 - 9z^4y^2 + 6z^5y + 2y^3z^2 - 4xy^3z - 6xz^5 + 12y^2z^3x + 2y^3x^2 + 9z^4x^2)}{(xy-zx+z^2-yz)^3(x-y)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= \frac{(y^2z - 4xy^2z + 2x^2y^2 - 3y^2z^3 + 2y^2z^2 - x^2y - yz^2 + 6xyz^3 - 3z^3x^2 + zx^2)x}{(x-y)^2(x-z)(xy-zx+z^2-yz)(-xy+yz+x^2-zx)} \\ &+ \frac{(3z^3x^2 - 4x^2yz + 2x^2y^2 - 6xyz^3 + 4xyz^2 + 2xyz - z^2x - xy^2 + 3y^2z^3 - 2y^2z^2)y}{(x-y)^2(y-z)(xy-zx+z^2-yz)(xy-zx-y^2+yz)} \\ &- \frac{(2xyz - 4xy^2z - xy^2 - z^2x + 2x^2y^2 + 2y^2z^2 + 3z^4y - 9x^2yz^2 + 9xy^2z^2 - 3xz^4 + 6z^3x^2 - 6y^2z^3)z}{(xy-zx+z^2-yz)^3(x-y)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 w}{\partial t \partial u} &= - \frac{y^2z - 4xy^2z + 2x^2y^2 - 3y^2z^3 + 2y^2z^2 - x^2y - yz^2 + 6xyz^3 - 3z^3x^2 + zx^2}{(x-y)^2(x-z)(xy-zx+z^2-yz)(-xy+yz+x^2-zx)} \\ &- \frac{3z^3x^2 - 4x^2yz + 2x^2y^2 - 6xyz^3 + 4xyz^2 + 2xyz - z^2x - xy^2 + 3y^2z^3 - 2y^2z^2}{(x-y)^2(y-z)(xy-zx+z^2-yz)(xy-zx-y^2+yz)} \\ &+ \frac{(2xyz - 4xy^2z - xy^2 - z^2x + 2x^2y^2 + 2y^2z^2 + 3z^4y - 9x^2yz^2 + 9xy^2z^2 - 3xz^4 + 6z^3x^2 - 6y^2z^3)}{(xy-zx+z^2-yz)^3(x-y)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 w}{\partial u^2} &= \frac{-3y^2z^2 + y^2 - 2xy + 2x^2y + 2yz^2 - 4xyz + 6xyz^2 + 2zx - 3z^2x^2 - z^2}{(x-y)^2(x-z)(xy-zx+z^2-yz)(-xy+yz+x^2-zx)} \\ &+ \frac{3z^2x^2 - 2zx^2 + 2xy^2 + 2z^2x - 6xyz^2 - z^2 + 2yz - 2y^2z - y^2 + 3y^2z^2}{(x-y)^2(y-z)(xy-zx+z^2-yz)(xy-zx-y^2+yz)} \\ &+ \frac{4xyz - 2yz - 6xy^2z + 6x^2yz - 2x^2y - 2yz^2 + z^2 + y^2 - 3z^2x^2 + 3y^2z^2}{(xy-zx+z^2-yz)^3(x-y)} \end{aligned}$$

となる。

$w = x^3 + y^3 + z^3$ とした場合の計算を結果のみ記しておく。 $\frac{D(x, y, z)}{D(s, t, u)}$ および $\frac{D(s, t, u)}{D(x, y, z)}$ は同じである。

$$\frac{D(w)}{D(s, t, u)} = \begin{pmatrix} 3x^2 + 3xy + 3zx + 3y^2 + 3yz + 3z^2 & -3x - 3y - 3z & 3 \end{pmatrix}$$

$$\frac{D(w_s, w_t, w_u)}{D(s, t, u)} = \begin{pmatrix} 6x + 6y + 6z & -3 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となる。

演習問題 2.11 $x = r \sin \theta \cos \varphi$, $y = r \sin \theta \sin \varphi$, $z = r \cos \theta$ とする (3次元の極座標表示)。関数 $w = f(x, y, z)$ に対し次を示せ。

(1) ヤコビアン $\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, \varphi)}$ を計算せよ。

(2) $\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2 = \left(\frac{\partial w}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta}\right)^2 + \left(\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial w}{\partial \varphi}\right)^2$

(3) $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2}$

3次行列 $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ に対しその行列式は

$$\det A = aei + dhc + gbf - gec - dbi - ahf$$

であるということは知っているとする。

(1)

$$\frac{D(x, y, z)}{D(r, \theta, \varphi)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \varphi & r \cos \theta \cos \varphi & -r \sin \theta \sin \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi & r \cos \theta \sin \varphi & r \sin \theta \cos \varphi \\ \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \end{pmatrix}$$

なので

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, \varphi)} = \det \left(\frac{D(x, y, z)}{D(r, \theta, \varphi)} \right) = r^2 \sin \theta$$

となる。

(2)

$$\frac{D(w)}{D(r, \theta, \varphi)} = \frac{D(w)}{D(x, y, z)} \frac{D(x, y, z)}{D(r, \theta, \varphi)}$$

なので

$$\begin{aligned}\frac{\partial w}{\partial r} &= \frac{\partial w}{\partial x} \sin \theta \cos \varphi + \frac{\partial w}{\partial y} \sin \theta \sin \varphi + \frac{\partial w}{\partial z} \cos \theta \\ \frac{\partial w}{\partial \theta} &= \frac{\partial w}{\partial x} r \cos \theta \cos \varphi + \frac{\partial w}{\partial y} r \cos \theta \sin \varphi - \frac{\partial w}{\partial z} r \sin \theta \\ \frac{\partial w}{\partial \varphi} &= -\frac{\partial w}{\partial x} r \sin \theta \sin \varphi + \frac{\partial w}{\partial y} r \sin \theta \cos \varphi\end{aligned}$$

となる。

$$\begin{aligned}\frac{\partial w}{\partial r} &= \frac{\partial w}{\partial x} \sin \theta \cos \varphi + \frac{\partial w}{\partial y} \sin \theta \sin \varphi + \frac{\partial w}{\partial z} \cos \theta \\ \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} &= \frac{\partial w}{\partial x} \cos \theta \cos \varphi + \frac{\partial w}{\partial y} \cos \theta \sin \varphi - \frac{\partial w}{\partial z} \sin \theta \\ \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial w}{\partial \varphi} &= -\frac{\partial w}{\partial x} \sin \varphi + \frac{\partial w}{\partial y} \cos \varphi\end{aligned}$$

となるので、各式を2乗して加えると

$$\left(\frac{\partial w}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta}\right)^2 + \left(\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial w}{\partial \varphi}\right)^2 = \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2$$

が成立する。

(3) $w_r = w_x x_r + w_y y_r + w_z z_r$ を r で微分して

$$\begin{aligned}w_{rr} &= (w_x)_r x_r + w_x x_{rr} + (w_y)_r y_r + w_y y_{rr} + (w_z)_r z_r + w_z z_{rr} \\ &= (w_{xx} x_r + w_{xy} y_r + w_{xz} z_r) x_r + w_x x_{rr} + (w_{yx} x_r + w_{yy} y_r + w_{yz} z_r) y_r \\ &\quad + w_y y_{rr} + (w_{zx} x_r + w_{zy} y_r + w_{zz} z_r) z_r + w_z z_{rr} \\ &= w_{xx} x_r^2 + w_{yy} y_r^2 + w_{zz} z_r^2 + 2w_{xy} x_r y_r + 2w_{yz} y_r z_r + 2w_{xz} x_r z_r + w_x x_{rr} + w_y y_{rr} + w_z z_{rr}\end{aligned}$$

を得る。同様に $w_{\varphi\varphi}, (\sin \theta w_\theta)_\theta$ を計算し、 $w_{rr} + \frac{2}{r} w_r + \frac{1}{r^2 \sin \theta} + (\sin \theta w_\theta)_\theta + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} w_{\varphi\varphi}$ の計算を実行すると求める式が得られる。