

演習問題 2.12 次の関数を  $(a, b)$  において  $n = 3$  とし, 剰余項を無視したテーラー展開を求めよ。

$$(1) z = f(x, y) = (x - 1)(y + 2) \quad (a, b) = (0, 0)$$

$$(2) z = f(x, y) = \frac{1}{1 - 2x + 3y} \quad (a, b) = (0, 0)$$

$$(3) z = f(x, y) = \sin(x + y) \quad (a, b) = \left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

$n = 3$  で剰余項無視した式は

$$f(a, b) + f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b) + \frac{1}{2} \{ f_{xx}(a, b)(x - a)^2 + 2f_{xy}(a, b)(x - a)(y - b) + f_{yy}(a, b)(y - b)^2 \}$$

である。

$$(1) f_x = y + 2, f_y = x - 1, f_{xx} = 0, f_{yy} = 0, f_{xy} = 1 \text{ なの}$$

$$-2 + 2x - y + xy$$

となる。

$$(2) f_x = 2(1 - 2x + 3y)^{-2}, f_y = -3(1 - 2x + 3y)^{-2}, f_{xx} = 8(1 - 2x + 3y)^{-3}, f_{xy} = -12(1 - 2x + 3y)^{-3}, f_{yy} = 18(1 - 2x + 3y)^{-3} \text{ なの}$$

$$1 + 2x - 3y + 4x^2 - 12xy + 9y^2$$

となる。

$$(3) f_x = f_y = \cos(x + y), f_{xx} = f_{xy} = f_{yy} = -\sin(x + y) \text{ なの}$$

$$-\left(x - \frac{\pi}{2}\right) - \left(y - \frac{\pi}{2}\right)$$

となる。

演習問題 2.13 次の関数の極大・極小を求めよ。

$$(1) z = x^2 - xy + y^2 - 2x + 3y + 1$$

$$(2) z = x^2 - 5xy + 2y^2 + x - y - 3$$

$$(3) z = \frac{ax + by}{x^2 + y^2 + 1} \quad (a \neq 0, b \neq 0)$$

$$(4) z = e^{-(x^2 + y^2)}(ax^2 + by^2) \quad (a > b > 0)$$

(1) 最初に臨界点を求める。 $z_x = 2x - y - 2, z_y = -x + 2y + 3$  なのので連立方程式  $z_x = 0, z_y = 0$  を解くと  $x = \frac{1}{3}, y = -\frac{4}{3}$  が得られる。(2) 次にヘッシアンを計算する。 $z_{xx} = 2, z_{yy} = 2, z_{xy} = -1$

なのので  $H(x, y) = 2^2 - (-1)^2 = 3 > 0, z_x > 0$  である。よって  $z$  は  $\left(\frac{1}{3}, -\frac{4}{3}\right)$  で極小値  $-\frac{4}{3}$  をとる。

(2) 前問と同様に計算すると  $\left(-\frac{1}{17}, \frac{3}{17}\right)$  が臨界点であるが,  $H\left(-\frac{1}{17}, \frac{3}{17}\right) = -17 < 0$  である。臨界点が極値を与えないので極値は存在しない。

(3)  $z_x = \frac{a}{x^2 + y^2 + 1} - \frac{2(ax + by)x}{(x^2 + y^2 + 1)^2}, z_y = \frac{b}{x^2 + y^2 + 1} - \frac{2(ax + by)y}{(x^2 + y^2 + 1)^2}$  なのので臨界点は

連立方程式  $z_x = 0, z_y = 0$  の解である。 $z_x = 0$  より  $x = \frac{x^2 + y^2 + 1}{2(ax + by)}a$  となる。また  $z_y = 0$

より  $y = \frac{x^2 + y^2 + 1}{2(ax + by)}b$  となる。  $k = \frac{x^2 + y^2 + 1}{2(ax + by)}$  とおくと  $x = ka, y = bk$  となる。これを  $z_x(x^2 + y^2 + 1) = a(x^2 + y^2 + 1) - 2(ax + by)x = 0$  に代入して

$$a((a^2 + b^2)k^2 + 1) - 2(a^2 + b^2)ak^2 = 0$$

を得る。これを解くと  $k = \pm \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}}$  となるので、臨界点は

$$(x, y) = \left( \pm \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \pm \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)$$

である。

$$H(x, y) = \left| \begin{array}{cc} \frac{2(ax^3 - 3y^2ax - 3ax + 3byx^2 - by^3 - by)}{(x^2 + y^2 + 1)^3} & \frac{2(3ayx^2 - ay^3 - ay - bx^3 + 3bxy^2 - bx)}{(x^2 + y^2 + 1)^3} \\ \frac{2(3ayx^2 - ay^3 - ay - bx^3 + 3bxy^2 - bx)}{(x^2 + y^2 + 1)^3} & -\frac{2(3byx^2 - by^3 + 3by - 3y^2ax + ax^3 + ax)}{(x^2 + y^2 + 1)^3} \end{array} \right|$$

となるが、

$$H\left(\pm \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \pm \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right) = \left| \begin{array}{cc} \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{2} \end{array} \right| = \frac{a^2 + b^2}{4} > 0$$

なので  $(x, y) = \left(\pm \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \pm \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right)$  は極大値を与える。極値は

$$z\left(\pm \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \pm \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right) = \frac{a^2 + b^2}{a^2 + b^2 + 1}$$

である。ここで  $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$  という記法を使った。

(4)  $z_x = -2xe^{-(x^2+y^2)}(ax^2 + by^2) + 2e^{-(x^2+y^2)}ax, z_y = -2ye^{-(x^2+y^2)}(ax^2 + by^2) + 2e^{-(x^2+y^2)}by$   
 なので連立方程式  $z_x = 0, z_y = 0$  を解くと (この計算は各自実行すること)

$$(x, y) = (0, 0), (0, \pm 1), (\pm 1, 0)$$

となる。

$$H(x, y) = \left| \begin{array}{cc} 2e^{-(x^2+y^2)}(-5ax^2 - by^2 + 2x^4a + 2x^2by^2 + a) & 4xye^{-(x^2+y^2)}(ax^2 + by^2 - b - a) \\ 4xye^{-(x^2+y^2)}(ax^2 + by^2 - b - a) & 2e^{-(x^2+y^2)}(-ax^2 - 5by^2 + 2y^2ax^2 + 2y^4b + b) \end{array} \right|$$

なので

$$B(0, 0) = \begin{vmatrix} 2a & 0 \\ 0 & 2b \end{vmatrix} = 4ab > 0$$

$$B(0, 1) = \begin{vmatrix} \frac{2(a-b)}{e} & 0 \\ 0 & -\frac{4b}{e} \end{vmatrix} = -\frac{8(a-b)b}{e^2} < 0$$

$$\begin{aligned}
B(0, -1) &= \begin{vmatrix} \frac{2(a-b)}{e} & 0 \\ 0 & -\frac{4b}{e} \end{vmatrix} = -\frac{8(a-b)b}{e^2} < 0 \\
B(1, 0) &= \begin{vmatrix} -\frac{4a}{e} & 0 \\ 0 & \frac{2(b-a)}{e} \end{vmatrix} = -\frac{8(b-a)a}{e^2} > 0 \\
B(-1, 0) &= \begin{vmatrix} -\frac{4a}{e} & 0 \\ 0 & \frac{2(b-a)}{e} \end{vmatrix} = -\frac{8(b-a)a}{e^2} > 0
\end{aligned}$$

となる。よって  $z$  は  $(x, y) = (0, 0)$  で極小値  $z(0, 0) = 0$ ,  $(x, y) = (\pm 1, 0)$  で極大値  $z(\pm 1, 0) = \frac{a}{e}$  をとる。

#### 演習問題 2.14

- (1) 3 辺の和が一定の 3 角形の中で面積最大のものを求めよ。
- (2) 定円に内接する 3 角形のなかで面積最大のものを求めよ。

(1) このタイプの問題では何を変数に選ぶかで計算量が変わる。ここではヘロンの公式を用いて解こう。ヘロンの公式：3 角形の 3 辺の長さを  $a, b, c$  とするとき、 $s = \frac{a+b+c}{2}$  とおくと、3 角形の面積  $S$  は  $S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$  となる。

3 角形の各辺の長さを  $x, y, z$  とする。3 辺の長さの和は一定であるのでこれを  $2s$  とおくと、即ち  $x+y+z = 2s$  ( $s > 0$ ) が成立している。 $x, y, z$  は辺の長さであるから  $x > 0, y > 0, z > 0$  を満たしている。 $x, y, z$  が 3 角形の 3 辺をなすためには 3 角不等式、即ち  $x+y > z, y+z > x, z+x > y$  が成立している事が必要である。逆にこれらの不等式が成立しているとき、3 辺の長さが  $x, y, z$  であるような 3 角形が存在する。 $z$  を消去して  $x, y$  の不等式から  $x < s, y < s, x+y > s$  が得られる。逆にこの 3 つの不等式をみたす  $x, y$  は最初の 6 つの不等式を満たす。(この部分は各自チェックする事。) よって  $D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x < s, y < s, x+y > s\}$  上で最大値問題を考える。しかし講義で述べた様に、最大値定理を適用するには領域が有界閉集合である必要がある。

$\bar{D} = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x \leq s, y \leq s, x+y \geq s\}$  とおく。ここで  $S$  が最大するとき  $S^2$  が最大であり、逆も成立する。よって  $S^2$  が最大になる場合を求めるればよい。 $f(x, y) = S^2 = s(s-x)(s-y)(x+y-s)$  とおき、 $\bar{D}$  上で  $f(x, y)$  の最大値を求める。 $\bar{D}$  は有界閉集合であり、 $f(x, y)$  は  $\bar{D}$  上の連続関数なので最大値が存在する。境界上または内部の点が最大値を与える。境界上では関数は  $f(x, y) = 0$  となる。内部で最大値をとる点は (広義の) 極値になっている。臨界点を求める。 $f_x = s(s-x)(s-y) - s(s-y)(x+y-s) = 0$ ,  $f_y = s(s-x)(s-y) - s(s-x)(x+y-s) = 0$  より  $(x, y) = (0, s), (s, 0), (s, s), \left(\frac{2s}{3}, \frac{2s}{3}\right)$  が得られる。この中に最大値を与える点が存在するので、それは  $(x, y) = \left(\frac{2s}{3}, \frac{2s}{3}\right)$  である。以上により最大値を与える 3 角形は正 3 角形である。

(2) 定円を点  $O$  を中心とする半径  $r$  の円とする。円に内接する 3 角形を  $ABC$  とする。角  $\angle AOB = s, \angle BOC = t, \angle COA = u$  とおくと  $s+t+u = 2\pi$  が成立している。最大面積を求めるので、 $ABC$  は  $O$  を含んでいるとしてよい。このとき  $ABC$  が 3 角形をなす条件は  $0 < s < \pi, 0 < t < \pi, 0 < u < \pi$  である。この不等式が定義する領域を  $D$  とすると  $D = \{(s, t) \in \mathbf{R}^2 \mid s < \pi, t < \pi, s+t > \pi\}$  と

なる (各自チェックすること)。

3 角形  $ABC$  の面積  $S$  は

$$S = \frac{1}{2}r^2 (\sin s + \sin t + \sin(2\pi - s - t))$$

なので,  $\bar{D} = \{(s, t) \in \mathbf{R}^2 \mid s \leq \pi, t \leq \pi, s + t \geq \pi\}$  上で  $z = f(s, t) = \frac{1}{2}r^2 (\sin s + \sin t + \sin(2\pi - s - t))$  の最大値を求める問題になる。以下略

**演習問題 2.15** 次で与えられる陰関数に関し  $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}$  を求めよ。

(1)  $1 - y + xe^y = 0$

(2)  $x^3y^3 + y - x = 0$

(1) 式の両辺を  $x$  で微分すると

$$-y' + e^y + xe^y y' = 0 \tag{1}$$

となる。よって

$$y' = \frac{e^y}{1 - xe^y}$$

となる。式 (1) の両辺を  $x$  で微分すると

$$-y'' + 2e^y y' + xe^y (y')^2 + xe^y y'' = 0$$

となるので

$$y'' = \frac{e^{2y}(2 - xe^y)}{(1 - xe^y)^2}$$

となる。

(2) 式の両辺を  $x$  で微分すると

$$3x^2y^3 + 3x^3y^2y' + y' - 1 = 0 \tag{2}$$

となる。よって

$$y' = \frac{1 - 3x^2y^3}{1 + 3x^3y^2}$$

となる。式 (2) の両辺を  $x$  で微分すると

$$6xy^3 + 18x^2y^2y' + 6x^3y(y')^2 + 3x^3y^2y'' + y'' = 0$$

となるので

$$y'' = \frac{6xy(9x^6y^6 + 3x^3y^4 - y^2 - 3x^4y^3 - 3xy - x^2)}{(1 + 3x^3y^2)^3}$$

となる。