数理解析 I 問題解説 #12

河野

講義でしつこく言ってるように，積分の検算が必ず実行してください。検算を実行すれば結果が正しいか間違っているかは分かるので，解答は書きません。どうしても知りたい人は直接聞きに来て下さい。

ネットに解説を載せているからといって，直接の質問がダメという分けでは勿論ありません。積極的な質問は大歓迎です。

演習問題 2.17 次の関数の不定積分を求めよ。

(1) $\dfrac{1}{x(x-1)}$ (2) $\dfrac{x^2+1}{x(x-1)^2}$ (3) $\dfrac{x^3}{(x+1)^2}$

(4) $\dfrac{1}{x(x^4-1)}$ (5) $\dfrac{1}{(x^2+1)^2}$ (6) $\dfrac{x-1}{x^2+2x+2}$

(7) $\dfrac{1}{x^3+1}$ (8) $\dfrac{1}{x^4+1}$

(1) $\dfrac{A}{x}+\dfrac{B}{x-1}$ と部分分数展開する。

(2) $\dfrac{A}{x}+\dfrac{Bx+C}{(x-1)^2}$ とするか，直接 $\dfrac{A}{x}+\dfrac{B}{x-1}+\dfrac{C}{(x-1)^2}$ と部分分数展開する。なお 2 つの式の C は等しいとは限りません。

(3) 分子の次数の方が高いので割り算をした後で，$\dfrac{A}{x+1}+\dfrac{B}{(x+1)^2}$ と部分分数展開する。

(4) $x^4-1=(x^2-1)(x^2+1)=(x-1)(x+1)(x^2+1)$ と因数分解できるので，$\dfrac{A}{x}+\dfrac{B}{x-1}+\dfrac{C}{x+1}+\dfrac{Dx+E}{x^2+1}$ と部分分数展開する。$\dfrac{x}{x^2+1}$ は $\dfrac{x}{x^2+1}=\dfrac{1}{2}\dfrac{(x^2+1)'}{x^2+1}$ と見て積分し，$\dfrac{1}{x^2+1}$ は $x=\tan t$ とおき，置換積分して求める。

(5) プリントにある様に $\dfrac{1}{x^2+1}$ の積分に帰着させます。色々な方法があるので，自分で考えてみるのも力をつける 1 つの方法です。自力で解ければ，かなり「積分力」がついていると思われます。

(6) $\dfrac{(x^2+2x+2)'}{x^2+2x+2}$ と $\dfrac{1}{x^2+2x+2}$ の定数倍の和に分ける。後者は $\dfrac{1}{(x+1)^2+1}$ と見て $u=x+1$ とおき置換積分する。その形を見れば次に何をすればよいかが分かります。

(7) $x^3+1=(x+1)(x^2-x+1)$ と因数分解できるので，$\dfrac{A}{x+1}+\dfrac{Bx+C}{x^2-x+1}$ と部分分数展開する。後者は (6) と同様に $\dfrac{(x^2-x+1)'}{x^2-x+1}$ と $\dfrac{1}{x^2-x+1}$ の定数倍の和の形に分ける。$\dfrac{1}{x^2-x+1}$ は $\dfrac{1}{\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{\sqrt{3}}{4}}$ と変形して置換積分，更にもう一度置換積分する。

(8) これは因数分解が問題。講義でも述べたように $x^4+1=x^4+2x^2+1-2x^2=(x^2+1)^2-(\sqrt{2}x)^2=(x^2-\sqrt{2}x+1)(x^2+\sqrt{2}x+1)$ と因数分解できる。$\dfrac{Ax+B}{x^2-\sqrt{2}x+1}+\dfrac{Cx+D}{x^2+\sqrt{2}x+1}$ と部分分数展開して，後は前問までと同様に計算する。

演習問題 2.18　次の関数の不定積分を求めよ。

(1) $\sin x \cos x$　　(2) $\sin^3 x$　　(3) $\dfrac{1}{\cos x}$

(4) $\dfrac{1}{\tan x}$　　(5) $\dfrac{1}{1+\sin x}$　　(6) $\dfrac{1}{\sin x - \cos x}$

(1) 三角関数の積の形は和に直すことで積分が簡単になる場合が多い。この問題の場合は和を積に直すことは倍角公式 $\sin 2x = 2\sin x \cos x$ を適応することに対応する (1 個の和に対応)。
(2) 和を積に直すことを 2 回実行すれば得られる。直接 3 倍角の公式を適応することと同じ結果になる。また $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ と見て $u = 1 - \cos^2 x$ と変数変換してもできる。

[**3 倍角を用いる方法**] 加法定理は知っているものとして 3 倍角の公式を導く。$\sin 3x = \sin(2x + x)$ より $\sin 3x = \sin 2x \cos x + \cos 2x \sin x = (2\sin x \cos x)\cos x + (\cos^2 x - \sin^2 x)\sin x = 2\sin x \cos^2 x + \cos^2 x \sin x - \sin^3 x$ となる。$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ を用いると，$\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$ となる。$\sin^3 x = \dfrac{3\sin x - \sin 3x}{4}$ なので…。

[$\boldsymbol{u = 1 - \cos^2 x}$ **とおく方法**] $\sin^3 x = -(\cos x)' \sin^2 x = -(\cos x)'(1 - \cos^2 x)$ と見る。$u = 1 - \cos^2 x$ とおくと…。
(3) $t = \tan\left(\dfrac{x}{2}\right)$ とおき置換積分を実行。
(4) $\dfrac{1}{\tan x} = \dfrac{\cos x}{\sin x}$ なので $t = \sin x$ とおき置換積分を実行。
(5) $t = \tan\left(\dfrac{x}{2}\right)$ とおき置換積分を実行。
(6) $t = \tan\left(\dfrac{x}{2}\right)$ とおき置換積分を実行。

演習問題 2.19　次の関数の不定積分を求めよ。

(1) $\sqrt{\dfrac{1-x}{x}}$　　(2) $\dfrac{1}{x + \sqrt{x-1}}$　　(3) $\dfrac{x}{(x-a)\sqrt{x+b}}$

プリントの様に $t = \sqrt{\dfrac{ax+b}{cx+d}}$ とおく。$t = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ とおいてもできる場合もある。

演習問題 2.20　次の関数の不定積分を求めよ。

(1) $\dfrac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}$　　(2) $\dfrac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}}$　　(3) $\sqrt{x^2 + a}$

(4) $\sqrt{a^2 - x^2}$　　(5) $x^2\sqrt{a^2 - x^2}$

三角関数を用いる方法，無理関数を用いる方法，双曲線関数を用いる方法とやり方は色々あります。色々な方法で自分で手を動かして計算してみてください。

演習問題 2.21　今までは学んだ事に対応する演習問題で，演習問題の場所によってどの方法を使うかというのは明らかであった。最後に色々なタイプを混ぜて演習問題とする。積分計算の手法を身につけるのが目的なのですべてを解く必要はない。また中には難問もある。嗅覚を働かせてそれを避ける練習にもなるかもしれない。

次の関数の不定積分を求めよ。

(1) $\dfrac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}$　　(2) $\cos^2 x - \sin^2 x$　　(3) $\dfrac{x}{(1+x^2)^{3/2}}$

(4) $x \arcsin x$　　(5) $\dfrac{\cos 2x}{e^{3x}}$　　(6) xe^{-x}

(7) $x\cos x$

(8) $x^2\sin x$

(9) e^{3x+1}

(10) $2x\arctan x$

(11) $\log(2x+1)$

(12) $\dfrac{1}{x(\log x)^n}$

(13) $x^2\log x$

(14) xe^{2x^2+3}

(15) $\dfrac{e^x}{x}+e^x\log x$

(16) $\arcsin\sqrt{\dfrac{x}{x+1}}$

(17) $(2x+1)\sin(x^2+x+1)$

(18) $\cos^n x\sin x$

(19) $(ax^2+bx+c)e^x$

(20) $\dfrac{\arcsin x}{(1-x^2)^{3/2}}$

(21) $\dfrac{x\arcsin x}{(1+x^2)^2}$

(22) $\sin(\log x)$

(23) x^3e^x

(24) x^4e^x

(25) $\dfrac{1}{x^4+x^2+1}$

(26) $\dfrac{1}{1+x^2}$

(27) $\dfrac{1}{(1+x)^2(x^2+1)}$

(28) $\dfrac{1}{1+x^3}$

(29) $\dfrac{1}{(1-x)^{2/3}-(1-x)^{1/2}}$

(30) $\dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}}$

(31) $\dfrac{1}{\cos^8 x}$

(32) $\dfrac{1}{\sin x\cos^5 x}$

(33) $\dfrac{1+\sin x}{\sin x(1+\cos x)}$

(34) $\dfrac{x}{\sqrt{a-x}}$

(35) $\dfrac{1}{\sqrt{x}(\sqrt[3]{x}+4)}$

(36) $\sqrt{(1-\sqrt[3]{x^2})^3}$

(37) $\dfrac{(a+bx^3)^{3/2}}{x}$

(38) $\dfrac{1}{3+\cos x}$

(39) $\dfrac{\sin x}{1+\sin x+\cos x}$

(40) $\dfrac{1}{(e^x+e^{-x})^4}$

(41) $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

(42) $\sqrt{x^2-1}$

(43) $\dfrac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}$

(44) $\dfrac{1}{x^2\sqrt{1+x^2}}$

(45) $\dfrac{1-x^2}{1+x^2\sqrt{1+x^2}}$

(46) $\dfrac{1}{(x+1)\sqrt{x^2+2x-1}}$

(47) $\dfrac{1}{1+x\sqrt{1+x^2}}$

(48) $\sqrt{x+\sqrt{x^2+2}}$

(49) $\dfrac{1-2x}{(3-2x)\sqrt{1-x^2}}$

(50) $\dfrac{1}{(4-3x^2)\sqrt{3+4x^2}}$

(51) $\dfrac{1}{x^4\sqrt{a^2+x^2}}$

(52) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{1-x^3}}$

(53) $\dfrac{1}{x\sqrt{1+x^6}}$

(54) $\dfrac{1}{4+x^2}$

(55) $\dfrac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$

(56) $\dfrac{1}{1+\sqrt[3]{x+1}}$

(57) $\dfrac{x^4}{\sqrt[4]{1+x^4}}$

(58) $\dfrac{x(x^2+3)}{(x^2-1)(x^2+1)^2}$

(59) $3x^2e^{x^3+1}$

(60) $\dfrac{1}{x^3(x+1)}$

(61) $\dfrac{2x^2+x+4}{x(x^2+2)^2}$

(62) $\dfrac{x^4-x^3-3x^2-x}{(x^2+1)^3}$

(63) $\dfrac{x^4-x^3+2x+1}{x^4-x^3-x+1}$

(64) $\dfrac{3}{x^3-1}$

(65) $\dfrac{1}{e^x+4e^{-x}+3}$

(66) $\dfrac{\sin^2 x}{1+3\cos^2 x}$

(67) $\dfrac{1}{e^x+e^{-x}}$

(68) $\dfrac{\sin x\cos x}{\sin^4 x+\cos^4 x}$

(69) $\dfrac{1}{a\sin^2 x+b\cos^2 x}$

(70) $\dfrac{1}{a\cos x+b\sin x}$

(71) $\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$

(72) $\dfrac{\sqrt{x}}{1+x}$

(73) $\dfrac{1}{2-\tan^2 x}$

(74) $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+4}}$

(75) $\dfrac{\cos x}{\sin^n x}$

(76) $\dfrac{1}{(2+x)\sqrt{1-x^2}}$

(77) $\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

(78) $\dfrac{\log(\log x)}{x}$

(79) $\dfrac{x^2}{\sqrt[3]{a^3+x^3}}$

(80) $\dfrac{1}{R^2-2RS\cos x+S^2}$

(81) $\dfrac{1}{(1+x)\sqrt{1-x}}$

(82) $\dfrac{\sqrt{x-1}}{x\sqrt{x+1}}$ (83) $\dfrac{12}{x^3-8}$ (84) $\dfrac{\sin x}{1+\sin x}$
(85) $\dfrac{1}{a+b\sin x}$ (86) $\sin 4x$ (87) $\dfrac{1}{\cos x(5+3\cos x)}$
(88) $\dfrac{x^2}{1+x^2}\arctan x$ (89) $\dfrac{\sin x}{3+\tan^2 x}$ (90) $\log(1+\sqrt{x})$
(91) $\dfrac{1+\sqrt{1+x}}{1-\sqrt{x}}$ (92) $\dfrac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}}$ (93) $\dfrac{1}{x^3(1+x^3)^{1/3}}$
(94) $3x^2(x^3+5)^6$ (95) $x^5(x^3+a^3)^{3/2}$ (96) $\dfrac{x^2}{\sqrt{(a+bx^2)^5}}$
(97) $\dfrac{1}{(x+2)\sqrt{2+x-x^2}}$ (98) $\dfrac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}$ (99) $e^{ax}\cos bx$
(100) $e^{ax}\sin bx$

問題が長いのでヒントの前に被積分関数をもう一度書いておきます。解説の中で積分は断りなしに I としてあります。

(1) $\dfrac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}$: いきなり「ルートのなかの 2 次式」を解く方法でやってもできますが，$\dfrac{x^3}{\sqrt{1-x^2}} = \dfrac{-x+x^3}{\sqrt{1-x^2}} + \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}} = -x\dfrac{1-x^2}{\sqrt{1-x^2}} + \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ と変形してから考えたほうが簡単かもしれない。

(2) $\cos^2 x - \sin^2 x$: 三角関数の積は和に直すというのが一般的な考え方ですが，この場合は加法定理の形そのものです。

(3) $\dfrac{x}{(1+x^2)^{3/2}}$: $\dfrac{x}{(1+x^2)^{3/2}} = \dfrac{1}{2}\dfrac{(1+x^2)'}{(1+x^2)^{3/2}}$ と見ると…。

(4) $x\arcsin x$: 部分積分法。

(5) $\dfrac{\cos 2x}{e^{3x}}$: 部分積分法を 2 回実行して形を見ると…。 一般的な形を後の (99) で考えます。

(6) xe^{-x} : 部分積分法。

(7) $x\cos x$: 部分積分法。

(8) $x^2\sin x$: 部分積分法 2 回。

(9) e^{3x+1} : 簡単な置換積分法。

(10) $2x\arctan x$: 部分積分法。

(11) $\log(2x+1)$: 簡単な置換積分法 + 部分積分法 (ただし $\log x$ の場合は $(x)'\log x$ と見る形の部分積分)。

(12) $\dfrac{1}{x(\log x)^n}$: $\dfrac{1}{x(\log x)^n} = (\log x)'\dfrac{1}{(\log x)^n}$ と考えると…。

(13) $x^2\log x$: 部分積分法。

(14) xe^{2x^2+3} : 置換積分法です。

(15) $\dfrac{e^x}{x} + e^x\log x$: 一方の関数を部分積分すると他の関数と打ち消しあって…。

(16) $\arcsin\sqrt{\dfrac{x}{x+1}}$: この様な問題の場合試行錯誤でやるしかありません。色々な置き方を試してうまくいくものを探します。まず思いつくのは $t = \dfrac{x}{x+1}$ とおくことでしょう。しかしこれを実行すると (各自計算してみること)，$\displaystyle\int \dfrac{2t}{(1-t^2)^2}\arcsin\sqrt{t}dt$ となりこの積分は計算できそうも

ありません。そこで $t=\arcsin\sqrt{\dfrac{x}{x+1}}$ とおくと $\displaystyle\int t\frac{2\sin t}{\cos^3 t}dt$ となります。$(\tan^2 t)'=\dfrac{2\sin t}{\cos^3 t}$ に気が付くと部分積分を実行して…。

(17) $(2x+1)\sin(x^2+x+1)$：$(2x+1)\sin(x^2+x+1)=(x^2+x+1)'\sin(x^2+x+1)$ なので…。

(18) $\cos^n x\sin x$：$\cos^n x\sin x=-\cos^n x(\cos x)'$ なので…。

(19) $(ax^2+bx+c)e^x$：部分積分。

(20) $\dfrac{\arcsin x}{(1-x^2)^{3/2}}$：(16) で述べたように，どう変数変換するかは試行錯誤でやるしかありません。でもこの場合 $\arcsin x$ を消すという考え方でも「ルートの中の 2 次式」という見方からも次のようにおくのは，少し積分に慣れれば気がつくと思います。つまりここを見なくても自分でできた人はかなり積分に精通しつつあるといえます。$t=\arcsin x$ とおき，$\displaystyle\int\frac{t}{\cos^2 t}dt=\int t(\tan t)'dt$ と変形してから部分積分。

(21) $\dfrac{x\arcsin x}{(1+x^2)^2}$：$\arcsin x$ を消すという考え方をすれば思いつく変数変換でしょうか。$t=\arcsin x$ とおき，$\displaystyle\int t\left(-\frac{1}{2(1+\sin^2 t)}\right)'dt$ と変形して部分積分。

(22) $\sin(\log x)$：$t=\log x$ とおき $\displaystyle\int e^t\sin t dt$ と変形。部分積分を 2 回して形を見ると…。 (100) でこの一般形を扱っている。

(23) x^3e^x：部分積分。

(24) x^4e^x：部分積分。

(25) $\dfrac{1}{x^4+x^2+1}$：因数分解が問題です。やり方は以前やった x^4+1 と同じで，$x^4+2x^2+1-x^2=(x^2+1)^2-x^2$ と 2 乗の差にして因数分解を実行する。あとは有理関数の積分の定石で部分分数展開して…。

(26) $\dfrac{1}{1+x^2}$：$x=\tan t$ と置換積分。

(27) $\dfrac{1}{(1+x)^2(x^2+1)}$：$\dfrac{Ax+B}{(x+1)^2}+\dfrac{Cx+D}{x^2+1}$ と部分分数展開するか，$\dfrac{A}{x+1}+\dfrac{B}{(x+1)^2}+\dfrac{Cx+D}{x^2+1}$ と部分分数展開して…。

(28) $\dfrac{1}{1+x^3}$：前にやった問題と同じ問題が紛れ込んでいました。

(29) $\dfrac{1}{(1-x)^{2/3}-(1-x)^{1/2}}$：どう置換積分するか試行錯誤するでしょう。$t=\sqrt{1-x}$ でもうまくいかないし，$t=\sqrt[3]{1-x}$ でもうまくいかない。1/2 乗と 1/3 乗を共通に表すことができる 1/6 乗に気がつくかどうかです。これは難問でしょうか。$t=\sqrt[6]{1-x}$ とおくと，$\displaystyle\int\frac{6t^2}{1-t}dt$

(30) $\dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}}$：「ルートの中の 2 次式」です。三角関数を用いる方法，無理式を用いる方法のどちらでもできますが，計算の難度は異なります。

(31) $\dfrac{1}{\cos^8 x}$：$I_n=\displaystyle\int\frac{1}{\cos^n x}dx$ とおき漸化式を求める。

$$\begin{aligned}
I_n &= \int\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^n x}dx=I_{n-2}+\int\sin x\left(\frac{1}{(n-1)\cos^{n-1}x}\right)'dx\\
&= \frac{n-2}{n-1}I_{n-2}+\frac{\sin x}{(n-1)\cos^{n-1}}
\end{aligned}$$

これを繰り返し適用すれば求まる。

(32) $\dfrac{1}{\sin x \cos^5 x}$ ： $t = \tan\left(\dfrac{x}{2}\right)$ とおいても計算できるが計算が複雑になるので，他の方法がある場合はそれで計算したほうがよい。この場合は $t = \tan x$ とおいた方が計算は簡単です ($t = \tan\left(\dfrac{x}{2}\right)$ よりも簡単だという意味です)。一般に $\sin x$ と $\cos x$ の偶数乗，例えば $\sin^2 x, \cos^2 x$, $\sin x \cos x$ などは $\tan x$ で表すことができます。$t = \tan x$ とおくと $I = \displaystyle\int \frac{1}{\sin x \cos^5 x} \cos^2 x dt = \int \frac{1}{\sin x \cos^3 x} dt$ となる。$\sin x \cos x = \dfrac{\sin x \cos x}{\cos^2 x + \sin^2 x} = \dfrac{\dfrac{\sin x \cos x}{\cos^2}}{\dfrac{\cos^2 x}{\cos^2 x} + \dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x}} = \dfrac{\tan x}{1 + \tan^2 x} = \dfrac{t}{1+t^2}$，$\cos^2 x = \dfrac{\cos^2 x}{\cos^2 x + \sin^2 x} = \dfrac{1}{1 + \tan^2 x} = \dfrac{1}{1+t^2}$ となるので $I = \displaystyle\int \frac{(1+t^2)^2}{t} dt$ となる。

(33) $\dfrac{1 + \sin x}{\sin x(1 + \cos x)}$ ： これは $t = \tan\left(\dfrac{x}{2}\right)$ とおくしかないようですね。

(34) $\dfrac{x}{\sqrt{a - x}}$ ： $t = a - x$ とおくと…。

(35) $\dfrac{1}{\sqrt{x}(\sqrt[3]{x} + 4)}$ ： これも試行錯誤で。(29) を理解した人は割とすぐに気づくかもしれませんね。$t = \sqrt[6]{x}$ とおくと…。

(36) $\sqrt{(1 - \sqrt[3]{x^2})^3}$ ： $t = \sqrt[3]{x}$ とおくと，$I = 3\displaystyle\int t^2(1 - t^2)^{3/2} dt$ となる。$t = \sin u$ とおくと $I = 3\displaystyle\int \sin^2 u \cos^4 u du$ となるので…。

(37) $\dfrac{(a + bx^3)^{3/2}}{x}$ ： $t = \sqrt{a + bx^3}$ とおくと $I = \dfrac{2}{3}\displaystyle\int \frac{bt^4}{t^2 - a} dt$ となるので…。

(38) $\dfrac{1}{3 + \cos x}$ ： $t = \tan\left(\dfrac{x}{2}\right)$ とおく。

(39) $\dfrac{\sin x}{1 + \sin x + \cos x}$ ： $t = \tan\left(\dfrac{x}{2}\right)$ とおく。

(40) $\dfrac{1}{(e^x + e^{-x})^4}$ ： $t = e^x$ とおくと，$\displaystyle\int \frac{t^3}{(t^2+1)^4} dt$ となる。$\dfrac{t^3}{(t^2+1)^4} = \dfrac{t^3 + t}{(t^2+1)^4} - \dfrac{t}{(t^2+1)^4} = \dfrac{t}{(t^2+1)^3} - \dfrac{t}{(t^2+1)^4}$ なので…。

(41) $\dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$ ： 「ルートの中の 2 次式」です。

(42) $\sqrt{x^2 - 1}$ ： 「ルートの中の 2 次式」です。

(43) $\dfrac{1}{\sqrt{x^2 - a^2}}$ ： 「ルートの中の 2 次式」です。

(44) $\dfrac{1}{x^2\sqrt{1 + x^2}}$ ： 「ルートの中の 2 次式」です。

(45) $\dfrac{1 - x^2}{1 + x^2\sqrt{1 + x^2}}$ ： 申し分けありません。括弧が消えたため超難問になったようです。計算も複雑だし，途中 3 次方程式の解を求めるため，3 次方程式の解の公式が必要になります。本当は $\dfrac{1 - x^2}{(1 + x^2)\sqrt{1 + x^2}}$ が問題でした。これなら超難問ではありません。

(46) $\dfrac{1}{(x+1)\sqrt{x^2 + 2x - 1}}$ ： 「ルートの中の 2 次式」です。$\sqrt{x^2 + 2x - 1} = t(x + 1 + \sqrt{2})$ とお

くと，$I=-2\int\frac{t}{\sqrt{2}-2-\sqrt{2}t^2}dt$ となるので…。

(47) $\frac{1}{1+x\sqrt{1+x^2}}$：「ルートの中の 2 次式」です。$\sqrt{1+x^2}=t-x$ とおくと，$I=\int\frac{t^2+1}{t^4+4t^2-1}dt$ となるので…。

(48) $\sqrt{x+\sqrt{x^2+2}}$：ルートの中にルートがありますが「ルートの中の 2 次式」の方法でできます。$\sqrt{x^2+2}=t-x$ とおくと…。

(49) $\frac{1-2x}{(3-2x)\sqrt{1-x^2}}$：「ルートの中の 2 次式」です。$\sqrt{1-x^2}=t-x$ とおくと，$I=-\int\frac{3t^2-1}{(5t^2+1)(1+t^2)}dt$ となるので…。

(50) $\frac{1}{(4-3x^2)\sqrt{3+4x^2}}$：「ルートの中の 2 次式」です。$\sqrt{3+4x^2}=t-2x$ とおくと，$I=-8\int\frac{t}{3t^4-82t^2+9}dt$ となるので…。

(51) $\frac{1}{x^4\sqrt{a^2+x^2}}$：「ルートの中の 2 次式」です。$x=a\tan t$ とおくと，$I=\frac{1}{a^4}\int\frac{\cos^3 t}{\sin^4 t}dt$ となるので $u=\sin t$ とおくと…。

(52) $\frac{1}{\sqrt[3]{1-x^3}}$：この置換積分は試行錯誤の末行き着くという様なものではないかもしれませんね。自分で見つけられなくてもかまいません。難問です。$t=\sqrt[3]{\frac{1}{x^3}-1}$ とおくと $I=-\int\frac{t}{t^3-1}dt$ となるので…。

(53) $\frac{1}{x\sqrt{1+x^6}}$：$t=\sqrt{1+x^6}$ とおくと…。

(54) $\frac{1}{4+x^2}$：これは基本です。$x=2\tan t$ とおくと…

(55) $\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$：(29),(35) と同様です。$t=\sqrt[6]{x}$ とおくと…。

(56) $\frac{1}{1+\sqrt[3]{x+1}}$：$t=\sqrt[3]{x+1}$ とおくと…。

(57) $\frac{x^4}{\sqrt[4]{1+x^4}}$：(52) と同様です。$t=\sqrt[4]{\frac{1}{x^4}+1}$ とおくと $-\int\frac{t^2}{t^4-1}dt$ となるので…。

(58) $\frac{x(x^2+3)}{(x^2-1)(x^2+1)^2}$：これは有理関数の積分の典型です。部分分数展開して…。

(59) $3x^2e^{x^3+1}$：典型的な置換積分。慣れてきた人は見ただけで分かると思います。

(60) $\frac{1}{x^3(x+1)}$：これは有理関数の積分の典型です。

(61) $\frac{2x^2+x+4}{x(x^2+2)^2}$：これも有理関数の積分の典型です。

(62) $\frac{x^4-x^3-3x^2-x}{(x^2+1)^3}$：$\frac{Ax+B}{x^2+1}+\frac{Cx+D}{(x^2+1)^2}+\frac{Ex+F}{(x^2+1)^3}$ と部分分数展開する。$\int\frac{1}{(x^2+1)^3}dx$ 等を分母の次数を下げて計算するので，その部分を理解していない人は対応する説明を参考に。

(63) $\frac{x^4-x^3+2x+1}{x^4-x^3-x+1}$：これも有理関数の積分の典型です。

(64) $\frac{3}{x^3-1}$：これも有理関数の積分の典型です。

(65) $\frac{1}{e^x+4e^{-x}+3}$：$t=e^x$ とおくと，$I=\int\frac{1}{t^2+3t+4}dt$ となるので…。

(66) $\dfrac{\sin^2 x}{1+3\cos^2 x}$: $t=\tan\left(\dfrac{x}{2}\right)$ とおいてもできるが (32) で述べた方法でできる。$t=\tan x$ とおくと…

(67) $\dfrac{1}{e^x+e^{-x}}$: $t=e^x$ とおくと…。

(68) $\dfrac{\sin x\cos x}{\sin^4 x+\cos^4 x}$: (32),(66) の方法でもできるが，$-(\cos x)'\dfrac{\cos x}{\sin^4 x+\cos^4 x}$ と $\sin^4 x$ が $\cos x$ で表されることに注意する。$t=\cos x$ とおくと，$I=-\displaystyle\int\dfrac{t}{2t^4-2t^2+1}dt$ となるので…。

(69) $\dfrac{1}{a\sin^2 x+b\cos^2 x}$: (32),(66) と同様に変数変換。$t=\tan x$ とおく。a,b の符号による場合分けが必要になる。

(70) $\dfrac{1}{a\cos x+b\sin x}$: $t=\tan\left(\dfrac{x}{2}\right)$ とおくと…。

(71) $\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$: $t=\sqrt{1-x}$ とおくと…。

(72) $\dfrac{\sqrt{x}}{1+x}$: $t=\sqrt{x}$ とおくと…。

(73) $\dfrac{1}{2-\tan^2 x}$: $t=\tan x$ とおくと…。

(74) $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+4}}$: 「ルートの中の 2 次式」

(75) $\dfrac{\cos x}{\sin^n x}$: $\dfrac{\cos x}{\sin^n x}=\dfrac{(\sin x)'}{\sin^n x}$ と見て…。

(76) $\dfrac{1}{(2+x)\sqrt{1-x^2}}$: 「ルートの中の 2 次式」。$\sqrt{1-x^2}=t(x+1)$ とおくと…。

(77) $\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$: 「ルートの中の 2 次式」

(78) $\dfrac{\log(\log x)}{x}$: $\dfrac{\log(\log x)}{x}=(\log x)'\log(\log x)$ なので $t=\log x$ とおくと…。

(79) $\dfrac{x^2}{\sqrt[3]{a^3+x^3}}$: $\dfrac{x^2}{\sqrt[3]{a^3+x^3}}=\dfrac{1}{3}\dfrac{(a^3+x^3)'}{\sqrt[3]{a^3+x^3}}$ と見て $t=a^3+x^3$ とおくと…。

(80) $\dfrac{1}{R^2-2RS\cos x+S^2}$: $t=\tan\dfrac{x}{2}$ とおく。R,S の場合分けが必要になるかもしれない。

(81) $\dfrac{1}{(1+x)\sqrt{1-x}}$: $t=\sqrt{1-x}$ とおくと…。

(82) $\dfrac{\sqrt{x-1}}{x\sqrt{x+1}}$: $t=\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$ とおくと…。

(83) $\dfrac{12}{x^3-8}$: 有理関数の積分の典型。

(84) $\dfrac{\sin x}{1+\sin x}$: $t=\tan\left(\dfrac{x}{2}\right)$ とおくと…。

(85) $\dfrac{1}{a+b\sin x}$: $t=\tan\left(\dfrac{x}{2}\right)$ とおくと…。場合分けが必要になる。

(86) $\sin 4x$: 簡単な置換積分。

(87) $\dfrac{1}{\cos x(5+3\cos x)}$: $t=\tan\left(\dfrac{x}{2}\right)$ とおくと…。

(88) $\dfrac{x^2}{1+x^2}\arctan x$: $t=\arctan x$ とおき，$I=\displaystyle\int t(\tan t-t)'dt$ 変形して部分積分。

(89) $\dfrac{\sin x}{3+\tan^2 x}$: $\dfrac{\sin x}{3+\tan^2 x}=-\dfrac{(\cos x)'}{3+\tan^2 x}$ と見る。$\tan^2 x=\dfrac{\sin^2}{\cos^2 x}$ は $\cos x$ で表されるの

で，$t=\cos x$ とおくと…。

(90) $\log(1+\sqrt{x})$: $t=\sqrt{x}$ とおくと…。

(91) $\dfrac{1+\sqrt{1+x}}{1-\sqrt{x}}$: $t=\sqrt{1+x}$ とおくと，$\dfrac{1+t}{1-\sqrt{t^2-1}}2t$ の積分になる。さらに $\sqrt{t^2-1}=s-t$ とおくと $\displaystyle\int\frac{(s+1)^2(s^2-1)}{s^2(1+2s-s^2)}ds$ となり，有理関数の積分に帰着できる。

(92) $\dfrac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}}$: $t=\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$ とおくと積分は

$$-4\int\frac{1}{1+t^2}dt+4\int\frac{1}{(1+t^2)^2}dt$$

となる。

(93) $\dfrac{1}{x^3(1+x^3)^{1/3}}$: (52),(57) と同様。$t=\left(\dfrac{1}{x^3}+1\right)^{\frac{1}{3}}$ とおくと…。

(94) $3x^2(x^3+5)^6$: 展開して計算しても勿論できますが，$t=x^3+5$ とおくと…。

(95) $x^5(x^3+a^3)^{3/2}$: $t=\sqrt{(x^3+a^3)}$ とおくと…。

(96) $\dfrac{x^2}{\sqrt{(a+bx^2)^5}}$: (52),(57),(93) と同様。$t=\sqrt{a\dfrac{1}{x^2}+b}$ とおくと…。

(97) $\dfrac{1}{(x+2)\sqrt{2+x-x^2}}$: 「ルートの中の 2 次式」。$\sqrt{2+x-x^2}=t(2+x)$ とおくと…。

(98) $\dfrac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}$: いきなり置換積分してもよいが，与式 $=\dfrac{a^2}{\sqrt{a^2-x^2}}-\sqrt{a^2-x^2}$ と変形してから置換積分する方法もある。

(99) $e^{ax}\cos bx$: **(100)** $e^{ax}\sin bx$: 2 つまとめて考える。$I_1=\displaystyle\int e^{ax}\cos bxdx, I_2=\int e^{ax}\sin bxdx$ とおく。部分積分を行なう事により，

$$I_1=\int\left(\frac{1}{a}e^{ax}\right)'\cos bxdx=\frac{1}{a}e^{ax}\cos bx+\frac{b}{a}I_2$$

を得る。同様に

$$I_2=\frac{1}{a}e^{ax}\sin bx-\frac{b}{a}I_1$$

がわかるので，連立方程式を解いて

$$I_1=\frac{1}{a^2+b^2}\left(ae^{ax}\cos bx+be^{ax}\sin bx\right), I_2=\frac{1}{a^2+b^2}\left(ae^{ax}\sin bx-be^{ax}\cos bx\right)$$

を得る。