

5.2 累次積分

重積分を定義に基づいて計算するのは、例の計算を考えれば分かるように大変である。ここでは計算する方法として「累次積分」を紹介する。累次積分を標語的にいうと「2重積分 = 1変数積分 2回」である。3重積分の場合は「3重積分 = 1変数積分 3回」、 n 重積分の場合は「 n 重積分 = 1変数積分 n 回」といえる。

最初に特別な形の領域に名前をつけておこう。領域 D が次の様に表す事ができるとき**縦線型**または**縦線領域**と呼ぶ。: 実数 a, b と $[a, b]$ で定義された連続関数 $y = g_1(x), y = g_2(x)$ が存在して

$$D = \{ (x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid a \leq x \leq b, g_1(x) \leq y \leq g_2(x) \}$$

と書ける。領域 D が次の様に表す事ができるとき**横線型**または**横線領域**と呼ぶ。: 実数 c, d と $[c, d]$ で定義された連続関数 $x = h_1(y), x = h_2(y)$ が存在して

$$D = \{ (x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid c \leq y \leq d, h_1(y) \leq x \leq h_2(y) \}$$

と書ける。

縦線型, 横線型の領域は面積確定である。ある領域が縦線型でも横線型でもあるという場合もある。例えば円は縦線型かつ横線型である。例えば $D = \{ (x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1 \}$ とする。 $D = \{ (x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid -1 \leq x \leq 1, -\sqrt{1-x^2} \leq y \leq \sqrt{1-x^2} \}$ となるので D は縦線型である。また $D = \{ (x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid -1 \leq y \leq 1, -\sqrt{1-y^2} \leq x \leq \sqrt{1-y^2} \}$ となるので横線型でもある。

定理 5.5 [累次積分] D は縦線型とする。即ち $D = \{ (x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid a \leq x \leq b, g_1(x) \leq y \leq g_2(x) \}$ とする。 $f(x, y)$ は D で定義された連続関数とする。このとき D における f の積分 (重積分) に対し次が成立する。

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b \left\{ \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy \right\} dx$$

また D が横線型のとき、即ち $D = \{ (x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid c \leq y \leq d, h_1(y) \leq x \leq h_2(y) \}$ と書けるとき重積分に対し次が成立する。

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_c^d \left\{ \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y) dx \right\} dy$$

定理の 2 つの式の左辺は重積分, 右辺は 1 変数積分を 2 回している事に注意。重積分を 1 変数関数の積分 2 回 (累次積分) に正しく直す事ができる様になる事がこのポイントである。領域が長方形の場合次の様に簡単になる。

系 5.6 D を長方形領域, 即ち $D = \{ (x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid a \leq x \leq b, c \leq y \leq d \}$ とする。このとき次が成立する。

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b \left\{ \int_c^d f(x, y) dy \right\} dx = \int_c^d \left\{ \int_a^b f(x, y) dx \right\} dy$$

このプリントも含め講義関連のプリントは <http://math.cs.kitami-it.ac.jp/~kouno/kougi.html> においてある。

テキストでは

$$\int_a^b \left\{ \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy \right\} dx = \int_a^b dx \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy$$

という表記法も用いているが、混乱をおこす場合があるので、この講義では採用しない。ただし各自がこの表記で計算する事を禁止するものではない。

例をいくつか計算してみよう。

例 5.7 (1) 最初に $I = \iint_D x^2 y dx dy$ ($D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1\}$) を考える。 D は縦線型とも横線型とも見る事ができるので 2 通りの計算を実行しよう。**注意**：重積分の計算のときは積分領域を必ず図示する事!! 縦線型と見ると $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 - x$ となるので、

$$I = \iint_D x^2 y dx dy = \int_0^1 \left\{ \int_0^{1-x} x^2 y dy \right\} dx$$

という累次積分の形にできる。後は 1 変数の積分を実行すればよい。実行すると

$$I = \int_0^1 \left\{ \left[\frac{1}{2} x^2 y^2 \right]_{y=0}^{1-x} \right\} dx = \int_0^1 \left\{ \frac{1}{2} x^2 (1-x)^2 \right\} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 (x^2 - 2x^3 + x^4) dx = \frac{1}{60}$$

となる。変数が 2 つあるため、定積分の計算の代入のとき間違っただ変数に代入する事がある。そのために $\left[\frac{1}{2} x^2 y^2 \right]_{y=0}^{1-x}$ という記号を採用した。

D を横線型と見做して同様の計算ができる。 $0 \leq y \leq 1, 0 \leq x \leq 1 - y$ なので、

$$I = \iint_D x^2 y dx dy = \int_0^1 \left\{ \int_0^{1-y} x^2 y dx \right\} dy$$

となり、

$$I = \int_0^1 \left\{ \left[\frac{1}{3} x^3 y \right]_{x=0}^{1-y} \right\} dy = \int_0^1 \left\{ \frac{1}{3} (1-y)^3 y \right\} dy = \frac{1}{3} \int_0^1 (y - 3y^2 + 3y^3 - y^4) dy = \frac{1}{60}$$

を得る。

2 重積分を累次積分で計算するとき、領域が縦線型かつ横線型であれば、 x と y のどちらを先に積分してもよい。しかし計算の複雑さが大きく変わる場合がある。 x を先に計算して複雑になってしょうがないときは、 y を先に計算してみるのも 1 つの方法である。

(2) 次に $I = \iint_D |\sin(x+y)| dx dy$ ($D = \{0 \leq x, 0 \leq y, x+y \leq 2\pi\}$) を考える。被積分関数に絶対値がついているので場合分けが必要になる。 $\sin(x+y)$ は $0 \leq x+y \leq \pi$ では 0 以上、 $\pi \leq x+y \leq 2\pi$ では 0 以下なので $D_1 = \{0 \leq x, 0 \leq y, x+y \leq \pi\}$, $D_2 = \{0 \leq x, 0 \leq y, \pi \leq x+y \leq 2\pi\}$ と領域を分ける。 $D_1 \cap D_2$ の面積は 0 なので

$$\iint_D |\sin(x+y)| dx dy = \iint_{D_1} |\sin(x+y)| dx dy + \iint_{D_2} |\sin(x+y)| dx dy$$

となる。 D_1 を縦線型と見ると、

$$D_1 = \{0 \leq x \leq \pi, 0 \leq y \leq \pi - x\}$$

と表す事ができる。よって

$$\begin{aligned} I_1 &= \iint_{D_1} |\sin(x+y)| dx dy = \int_0^\pi \left\{ \int_0^{\pi-x} \sin(x+y) dy \right\} dx \\ &= \int_0^\pi \left[-\cos(x+y) \right]_{y=0}^{\pi-x} dx = \int_0^\pi ((1 + \cos x) dx = \pi \end{aligned}$$

となる。

また D_2 は縦線型にはなっていないが、1つの式で書く事ができないので更に2つの領域に分ける。 $D_{21} = \{(x, y) \in D_2 \mid x \leq \pi\}$, $D_{22} = \{(x, y) \in D_2 \mid x \geq \pi\}$ とすると、 $D_{21} \cap D_{22}$ の面積は0なので

$$I_2 = \iint_{D_2} |\sin(x+y)| dx dy = \iint_{D_{21}} |\sin(x+y)| dx dy + \iint_{D_{22}} |\sin(x+y)| dx dy$$

となる。 $D_{21} = \{0 \leq x \leq \pi, \pi - x \leq y \leq 2\pi - x\}$, $D_{22} = \{\pi \leq x \leq 2\pi, 0 \leq y \leq 2\pi - x\}$ と縦線型に書けるのでこれを計算して

$$I = I_1 + I_2 = \pi + 3\pi = 4\pi$$

となる。

演習問題 5.3 次の重積分について考える。ただし D は $y = x + 1$ と $y = x^2 - 1$ で囲まれる領域とする。

$$I = \iint_D (x+y) dx dy$$

- (1) 領域 D を図示せよ。
- (2) 重積分 I を y を先に積分する形の累次積分で表し、その後 I を求めよ。
- (3) 重積分 I を x を先に計算する形の累次積分で表すために、領域 D を2つの領域 D_1, D_2 に分け、それぞれの領域での積分を x を先にする形の累次積分で表せ。この方法で I を計算せよ。

演習問題 5.4 次の重積分を求めよ。

- (1) $\iint_D x dx dy$ $D = \left\{ \frac{x}{a} + \frac{y}{b} \leq 1, x \geq 0, y \geq 0 \right\}$ ただし $a > 0, b > 0$ とする。
- (2) $\iint_D \{x+y\} dx dy$ $D = \{x^2 \leq y \leq x+2\}$
- (3) $\iint_D \{2x^2 + 3y^3\} dx dy$ $D = \{x^2 + y^2 \leq a^2\}$ ただし $a > 0$ とする。

演習問題 5.5 次の重積分について考える。ただし $D = \{0 \leq y \leq x \leq 1\}$ とする。

$$I = \iint_D e^{-x^2} dx dy$$

- (1) 領域 D を図示せよ。
- (2) D をを横線形 ($\{(x, y) \mid c \leq y \leq d, h_1(y) \leq x \leq h_2(y)\}$ の形のもの) の形で表せ。

- (3) 重積分 I を x を先に計算する形の累次積分で表せ (計算を実行しなくてもよい)。
- (4) D を縦線形 ($\{(x, y) \mid a \leq x \leq b, g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}$ の形のもの) の形で表せ。
- (5) 重積分 I を y を先に積分する形の累次積分で表せ。
- (6) I を求めよ。