

演習問題 4.1 次の関数の定積分を定義に基づいて求めよ。ただし次の公式を用いる必要があるかもしれない。

$$\sum_{k=1}^n k^3 = \left\{ \frac{n(n+1)}{2} \right\}^2, \quad \sum_{k=1}^n \sin kx = \frac{\cos \frac{x}{2} - \cos \left( n + \frac{1}{2} \right) x}{2 \sin \frac{x}{2}}$$

(1)  $\int_0^1 x^3 dx$

(2)  $\int_0^{\pi/2} \sin x dx$

(1)  $\Delta_n = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$  を区間  $[0, 1]$  の  $n$  等分を与える分割とする。即ち,  $x_i = \frac{i}{n}$  とする。 $y = x^3$  は  $[0, 1]$  では単調増加関数なので, 小区間  $[x_{i-1}, x_i]$  では

$$m_i = \inf \{ x^3 \mid x_{i-1} \leq x \leq x_i \} = x_{i-1}^3, \quad M_i = \sup \{ x^3 \mid x_{i-1} \leq x \leq x_i \} = x_i^3$$

となる。上限・下限がよく分からないものは, この場合は連続関数なので, 小区間における最大値・最小値と読みかえてもよい。また  $\Delta x_i = x_i - x_{i-1} = \frac{1}{n}$  なので

$$\begin{aligned} s(\Delta_n) &= \sum_{i=1}^n \left( \frac{i-1}{n} \right)^3 \frac{1}{n} = \frac{1}{n^4} \sum_{i=1}^n (i-1)^3 \\ &= \frac{1}{n^4} \left\{ \frac{(n-1)n}{2} \right\}^2 = \frac{1}{4} \left( 1 - \frac{1}{n} \right)^2 \end{aligned}$$

となる。また

$$\begin{aligned} S(\Delta_n) &= \sum_{i=1}^n \left( \frac{i}{n} \right)^3 \frac{1}{n} = \frac{1}{n^4} \sum_{i=1}^n i^3 \\ &= \frac{1}{n^4} \left\{ \frac{n(n+1)}{2} \right\}^2 = \frac{1}{4} \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^2 \end{aligned}$$

となる。 $\|\Delta_n\| = \frac{1}{n}$  なので  $n \rightarrow \infty$  のとき  $\|\Delta_n\| \rightarrow 0$  となる。 $\lim_{n \rightarrow \infty} s(\Delta_n) = \frac{1}{4} = \lim_{n \rightarrow \infty} S(\Delta_n)$  となるので,  $y = x^3$  は  $[0, 1]$  で積分可能であり,

$$\int_0^1 x^3 dx = \frac{1}{4}$$

となる。

(2)  $\Delta_n = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$  を区間  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  の  $n$  等分を与える分割とする。即ち,  $x_i = \frac{\pi i}{2n}$  とする。 $y = \sin x$  は  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  では単調増加関数なので, 小区間  $[x_{i-1}, x_i]$  では

$$m_i = \inf \{ \sin x \mid x_{i-1} \leq x \leq x_i \} = \sin x_{i-1}, \quad M_i = \sup \{ \sin x \mid x_{i-1} \leq x \leq x_i \} = \sin x_i$$

となる。また  $\Delta x_i = x_i - x_{i-1} = \frac{\pi}{2n}$  なので

$$\begin{aligned} s(\Delta_n) &= \sum_{i=1}^n \sin\left(\frac{\pi(i-1)}{2n}\right) \frac{\pi}{2n} = \frac{\pi}{2n} \frac{\cos \frac{\pi}{4n} - \cos\left\{\left(n - \frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{2n}\right\}}{2 \sin \frac{\pi}{4n}} \\ &= \frac{\frac{\pi}{4n}}{\sin \frac{\pi}{4n}} \left\{ \cos \frac{\pi}{4n} - \cos \left\{ \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4n} \right\} \right\} \end{aligned}$$

となる。また

$$\begin{aligned} S(\Delta_n) &= \sum_{i=1}^n \sin\left(\frac{\pi i}{2n}\right) \frac{\pi}{2n} = \frac{\pi}{2n} \frac{\cos \frac{\pi}{4n} - \cos\left\{\left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{2n}\right\}}{2 \sin \frac{\pi}{4n}} \\ &= \frac{\frac{\pi}{4n}}{\sin \frac{\pi}{4n}} \left\{ \cos \frac{\pi}{4n} - \cos \left\{ \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4n} \right\} \right\} \end{aligned}$$

となる。 $\|\Delta_n\| = \frac{\pi}{2n}$  なので  $n \rightarrow \infty$  のとき  $\|\Delta_n\| \rightarrow 0$  となる。 $\lim_{n \rightarrow \infty} s(\Delta_n) = 1 = \lim_{n \rightarrow \infty} S(\Delta_n)$

となるので、 $y = \sin x$  は  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  で積分可能であり、

$$\int_0^{\pi/2} \sin x dx = 1$$

となる。