

演習問題 4.2 命題 4.6 を証明せよ。

$[a, b]$ の分割 $\Delta = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ とする。各 i ($i = 1, \dots, n$) に対し $x_{i-1} \leq c_i \leq x_i$ を満たす c_i を選んでリーマン和を考える。リーマン和

$$\Sigma_f(\Delta; \{c_i\}) = \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i$$

$$\Sigma_g(\Delta; \{c_i\}) = \sum_{i=1}^n g(c_i) \Delta x_i$$

$$\Sigma_{f+g}(\Delta; \{c_i\}) = \sum_{i=1}^n (f(c_i) + g(c_i)) \Delta x_i$$

を考えると

$$\Sigma_{f+g}(\Delta; \{c_i\}) = \Sigma_f(\Delta; \{c_i\}) + \Sigma_g(\Delta; \{c_i\})$$

が成立している。ここで $\|\Delta\| \rightarrow 0$ とすると

$$\int_a^b (f(x) + g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$$

が得られる。

αf のリーマン和は

$$\begin{aligned} \Sigma_{\alpha f}(\Delta; \{c_i\}) &= \sum_{i=1}^n \alpha f(c_i) \Delta x_i \\ &= \alpha \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i \\ &= \alpha \Sigma_f(\Delta; \{c_i\}) \end{aligned}$$

なので, $\|\Delta\| \rightarrow 0$ とすると

$$\int_a^b \alpha f(x) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx$$

が得られる。

$\Delta_1 = \{y_0, y_1, \dots, y_m\}$ を $[a, c]$ の分割 (即ち $a = y_0 < y_1 < \dots < y_m = c$ が成立している) とし, $\Delta_2 = \{z_0, z_1, \dots, z_\ell\}$ を $[c, b]$ の分割 (即ち $c = z_0 < z_1 < \dots < z_\ell = b$ が成立している) とする。 $x_i = y_i$ ($i = 0, 1, \dots, m$), $x_i = z_{i-m}$ ($i = m+1, \dots, m+\ell$) とおくと $\{x_0, x_1, \dots, x_{m+\ell}\}$ は $[a, b]$ の分割である。各 i ($i = 1, \dots, m$) に対し $y_{i-1} \leq c_i \leq y_i$ となる c_i を選ぶ。 $\Delta y_i = y_i - y_{i-1}$ とおく。各 i ($i = 1, \dots, \ell$) に対し $z_{i-1} \leq d_i \leq z_i$ となる d_i を選ぶ。 $\Delta z_i = z_i - z_{i-1}$ とおく。 $e_i = c_i$

$(i = 0, 1, \dots, m)$, $e_i = d_{i-m}$ ($i = m + 1, \dots, m + \ell$) とおく。

$$\begin{aligned}\Sigma_1(\Delta_1; \{c_i\}) &= \sum_{i=1}^m f(c_i)\Delta y_i \\ \Sigma_2(\Delta_2; \{d_i\}) &= \sum_{i=1}^{\ell} f(d_i)\Delta z_i \\ \Sigma(\Delta; \{e_i\}) &= \sum_{i=1}^{m+\ell} f(e_i)\Delta x_i\end{aligned}$$

とおくと

$$\Sigma(\Delta; \{e_i\}) = \Sigma_1(\Delta_1; \{c_i\}) + \Sigma_2(\Delta_2; \{d_i\})$$

が成立している。ここで $\|\Delta_1\| \rightarrow 0$ かつ $\|\Delta_2\| \rightarrow 0$ とすると $\|\Delta\| \rightarrow 0$ となり,

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

が得られる。

定数関数 τ に関してリーマン和は

$$\begin{aligned}\Sigma_{\tau}(\Delta; \{c_i\}) &= \sum_{i=1}^n \tau(c_i)\Delta x_i \\ &= \sum_{i=1}^n \Delta x_i \\ &= b - a\end{aligned}$$

となるので $\|\Delta\| \rightarrow 0$ とすると

$$\int_a^b \tau(x)dx = b - a$$

が得られる。

演習問題 *4.3 関数 f と区間 $[a, b]$ に対し実数を対応される対応 $J(f, [a, b])$ が命題 4.6 の 4 つの性質を持つとき, この J は定義 4.1 で定義した積分と一致する事を示せ。

関数の積分可能性の問題を議論すると微妙な問題を含むので, ここででてくる関数はすべて積分可能として話を進める。

区間 $[a, b]$ では 1 となり, それ以外では 0 となる関数を $\tau_a^b(x)$ と書くことにする。 c を $a < c < b$ を満たす数とする。 f を $[a, c]$ では a_1 , $(c, b]$ では a_2 を値にとる関数とする。 c での値は任意とする。このとき $J(f; [a, b]) = a_1(c - a) + a_2(b - c)$ が成立することを示す。 $d = \max\{a_1, a_2, f(c)\}$ とする。 $\varepsilon > 0$ を $\min\{b - c, c - a\} > \varepsilon$ を満たす任意の正数とする。 $g(x) = a_1\tau_a^{c-\varepsilon}(x) + d\tau_{a-\varepsilon}^{a+\varepsilon}(x) + a_2\tau_{c+\varepsilon}^b(x)$ とおくと $f(x) \leq g(x)$ を満たしている。このとき

$$\begin{aligned}J(f; [a, b]) &\leq J(g; [a, b]) \\ &= J(g; [a, c - \varepsilon]) + J(g; [c - \varepsilon, c + \varepsilon]) + J(g; [c + \varepsilon, b]) \\ &= a_1(c - \varepsilon - a) + 2d\varepsilon + a_2(b - c - \varepsilon)\end{aligned}$$

となる。この式が任意の ε について成立するので、 $J(f; [a, b]) \leq a_1(c-a) + a_2(b-c)$ が成立する。また $e = \min\{a_1, a_2, f(c)\}$ とする。 $h(x) = e$ とする。 $\varepsilon > 0$ を $\min\{b-c, c-a\} > \varepsilon$ を満たす任意の正数とする。 $h(x) = a_1\tau_a^{c-\varepsilon}(x) + e\tau_{a-\varepsilon}^{a+\varepsilon}(x) + a_2\tau_{c+\varepsilon}^b(x)$ とおくと $f(x) \geq h(x)$ を満たしている。このとき

$$\begin{aligned} J(f; [a, b]) &\geq J(h; [a, b]) \\ &= J(h; [a, c-\varepsilon]) + J(h; [c-\varepsilon, c+\varepsilon]) + J(h; [c+\varepsilon, b]) \\ &= a_1(c-\varepsilon-a) + 2e\varepsilon + a_2(b-c-\varepsilon) \end{aligned}$$

となる。この式が任意の ε について成立するので、 $J(f; [a, b]) \geq a_1(c-a) + a_2(b-c)$ が成立する。前の式と合わせて $J(f; [a, b]) = a_1(c-a) + a_2(b-c)$ が成立する。

上の議論を繰り返すことにより、次を示すことができる。 $\Delta = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ を $[a, b]$ の分割とする。 g を $x_{i-1} \leq x \leq x_i$ に対しては $g(x) = a_i$ となり、 x_i ($i = 0, 1, \dots, n$) では任意の値をとる関数とする。このとき

$$J(g; [a, b]) = a_1(x_1 - x_0) + a_2(x_2 - x_1) + \dots + a_n(x_n - x_{n-1})$$

となる。

分割 $\Delta = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ に対し $m_i, M_i, s(\Delta), S(\Delta)$ を積分の定義において定義したものとす。 g を $x_{i-1} \leq x \leq x_i$ に対しては $g(x) = M_i$ となり、 $M_i = g(x_i)$ ($i = 1, \dots, n$) かつ $M_1 = g(x_0)$ をみたく関数とする。このとき、任意の x ($a \leq x \leq b$) に対し $f(x) \leq g(x)$ が成立している。 h を $x_{i-1} \leq x \leq x_i$ に対しては $h(x) = m_i$ となり、 $m_i = h(x_i)$ ($i = 1, \dots, n$) かつ $m_1 = h(x_0)$ をみたく関数とする。このとき、任意の x ($a \leq x \leq b$) に対し $h(x) \leq f(x)$ が成立している。このとき

$$\begin{aligned} J(g; [a, b]) &= M_1(x_1 - x_0) + M_2(x_2 - x_1) + \dots + M_n(x_n - x_{n-1}) \\ &= S(\Delta) \\ J(h; [a, b]) &= m_1(x_1 - x_0) + m_2(x_2 - x_1) + \dots + m_n(x_n - x_{n-1}) \\ &= s(\Delta) \end{aligned}$$

が成立する。 J の単調性より

$$J(h; [a, b]) \leq J(f; [a, b]) \leq J(g; [a, b])$$

を得る。これに前式を代入すると

$$s(\Delta) \leq J(f; [a, b]) \leq S(\Delta)$$

が得られる。ここで $\|\Delta\| \rightarrow 0$ とすると

$$J(f; [a, b]) = \int_a^b f(x) dx$$

が得られる。