数理解析 II 問題解説 #3

河野

演習問題 4.4　f を連続関数とするとき次を x で微分せよ。

(1) $\displaystyle\int_x^{2x} f(t)dt$　　(2) $\displaystyle\int_{2x}^{x^2} f(t)dt$　　(3) $\displaystyle\int_x^{3x} xf(t)dt$

f の原始関数を F とする。

(1) $\displaystyle\int_x^{2x} f(t)dt = F(2x) - F(x)$ と書ける。これを x で微分すると，

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\int_x^{2x} f(t)dt &= \frac{d}{dx}F(2x) - \frac{d}{dx}F(x) \\ &= 2F'(2x) - F'(x) = 2f(2x) - f(x)\end{aligned}$$

となる。

(2) $\displaystyle\int_{2x}^{x^2} f(t)dt = F(x^2) - F(2x)$ と書ける。これを x で微分すると，

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\int_{2x}^{x^2} f(t)dt &= \frac{d}{dx}F(x^2) - \frac{d}{dx}F(2x) \\ &= 2xF'(x^2) - 2F'(2x) = 2xf(x^2) - 2f(2x)\end{aligned}$$

となる。

(3) $\displaystyle\int_x^{3x} xf(t)dt = x\int_x^{3x} f(t)dt = xF(3x) - xF(x)$ と書ける。

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\int_x^{3x} xf(t)dt &= \frac{d}{dx}\{xF(3x)\} - \frac{d}{dx}\{xF(x)\} \\ &= F(3x) + x3F'(3x) - F(x) - xF'(x) \\ &= F(3x) - F(x) + 3xf(3x) - xf(x) \\ &= \int_x^{3x} f(t)dt + 3xf(3x) - xf(x)\end{aligned}$$

となる。

演習問題 4.5　被積分関数が偶関数または奇関数で積分領域が $[-a, a]$ の場合は少し計算が簡単になる。ここで $f(x)$ が**偶関数**とは任意の x に対し $f(-x) = f(x)$ が成立することであり，**奇関数**とは $f(-x) = -f(x)$ が成立することをいう。次を示せ。

(1) $f(x)$ が偶関数のとき $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$ が成立する。

(2) $f(x)$ が奇関数のとき $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$ が成立する。

いずれの場合も $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{-a}^{0} f(x)dx + \int_0^a f(x)dx$ が成立している。

(1) $\displaystyle\int_{-a}^{0} f(x)dx$ において $t=-x$ と変数変換すると，$\dfrac{dx}{dt}=-1$ であり，$x:-a\to 0$ のとき $t:a\to 0$ となる。

$$\begin{aligned}\int_{-a}^{0} f(x)dx &= \int_{a}^{0} f(-t)\frac{dx}{dt}dt = \int_{a}^{0} f(t)(-1)dt = -\int_{a}^{0} f(t)dt \\ &= \int_{0}^{a} f(t)dt = \int_{0}^{a} f(x)dx\end{aligned}$$

なので $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx$ が示される。

(2) $\displaystyle\int_{-a}^{0} f(x)dx$ において $t=-x$ と変数変換すると，$\dfrac{dx}{dt}=-1$ であり，$x:-a\to 0$ のとき $t:a\to 0$ となる。

$$\begin{aligned}\int_{-a}^{0} f(x)dx &= \int_{a}^{0} f(-t)\frac{dx}{dt}dt = \int_{a}^{0} -f(t)(-1)dt = \int_{a}^{0} f(t)dt \\ &= -\int_{0}^{a} f(t)dt = -\int_{0}^{a} f(x)dx\end{aligned}$$

なので $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$ が示される。

演習問題 4.6　次の定積分を微積分の基本定理を用いて計算せよ。

(1) $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{1}{x^2-4}dx$　　(2) $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{4x-3}{(x^2+1)(x-2)^2}dx$

(3) $\displaystyle\int_{0}^{1} x\sqrt{1-x^2}dx$　　(4) $\displaystyle\int_{0}^{1} \arctan x dx$

(5) $\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\sin^3 x - \sin x\right) dx$　　(6) $\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^3 x dx$

この積分はどれも難しくない。不定積分で学んだことが身についているかの確認のつもりで解いて見る事。いずれの関数も積分区間で連続なので微積分の基本定理を使える。

(1) $\dfrac{1}{x^2-4} = \dfrac{1}{4}\dfrac{1}{x-2} - \dfrac{1}{4}\dfrac{1}{x+2}$ と部分分数展開できる。

$$\begin{aligned}\int_{0}^{1} \frac{1}{x^2-4}dx &= \frac{1}{4}\int_{0}^{1} \frac{1}{x-2}dx - \frac{1}{4}\int_{0}^{1} \frac{1}{x+2}dx \\ &= \frac{1}{4}\Big[\log|x-2|\Big]_{0}^{1} - \frac{1}{4}\Big[\log|x+2|\Big]_{0}^{1} \\ &= \frac{1}{4}\big(\log 1 - \log 2\big) - \frac{1}{4}\big(\log 3 - \log 2\big) = -\frac{1}{4}\log 3\end{aligned}$$

(2) $\dfrac{4x-3}{(x^2+1)(x-2)^2} = \dfrac{1}{(x-2)^2} - \dfrac{1}{1+x^2}$ と部分分数展開できる。

$$\begin{aligned}\int_{0}^{1} \frac{4x-3}{(x^2+1)(x-2)^2}dx &= \int_{0}^{1} \frac{1}{(x-2)^2}dx - \int_{0}^{1} \frac{1}{1+x^2}dx \\ &= -\left[\frac{1}{x-2}\right]_{0}^{1} - \Big[\arctan x\Big]_{0}^{1}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= 1-\frac{1}{2}-\left(\arctan 1-\arctan 0\right)\\
&= \frac{1}{2}-\frac{\pi}{4}
\end{aligned}
$$

(3) 置換積分法を用いる。$t=1-x^2$ とおくと，$\dfrac{dt}{dx}=-2x$ なので，$\dfrac{dx}{dt}=-\dfrac{1}{2x}$ である。また x が $x:0\to 1$ と変化するとき，t は $t:1\to 0$ と変化する。よって

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 x\sqrt{1-x^2}dx &= \int_1^0 x\sqrt{t}\frac{dx}{dt}dt=\int_1^0 x\sqrt{t}\left(-\frac{1}{2x}\right)dt=-\frac{1}{2}\int_1^0\sqrt{t}dt\\
&= \frac{1}{2}\int_0^1\sqrt{t}dt=\frac{1}{2}\left[\frac{2}{3}t^{3/2}\right]_0^1=\frac{1}{3}
\end{aligned}
$$

(4) 部分積分法を用いる。$t=\arctan x$ は「$x=\tan t$ かつ $-\dfrac{\pi}{2}<t<\dfrac{\pi}{2}$」と同値であるから，$\arctan 0=0,\arctan 1=\dfrac{\pi}{4}$ である。$(\arctan x)'=\dfrac{1}{1+x^2}$, $x'=1$ である事に注意する。

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 \arctan x dx &= \int_0^1 x'\arctan x dx\\
&= \Big[x\arctan x\Big]_0^1-\int_0^1 x\left(\arctan x\right)' dx\\
&= \arctan 1-0\arctan 0-\int_0^1\frac{x}{1+x^2}dx\\
&= \frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\int_0^1\frac{(1+x^2)'}{1+x^2}dx\\
&= \frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\int_1^2\frac{1}{u}du\\
&= \frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\Big[\log u\Big]_0^1=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\log 2
\end{aligned}
$$

(5) $f(x)=\sin^3 x-\sin x$ とおくと $f(-x)=\sin^3(-x)-\sin(-x)=(-1)^3\sin^3-(-1)\sin x=-\left(\sin^3 x-\sin x\right)=-f(x)$ なので，$f(x)$ は奇関数である。よって $\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left\{\sin^3 x-\sin x\right\}dx=0$ である。

(6) $f(x)=\cos^3 x$ とおくと $f(-x)=\cos^3(-x)=\cos^3 x=f(x)$ なので，$f(x)$ は偶関数である。

$$
\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^3 x dx = 2\int_0^{\pi/2}\cos^3 x dx=2\int_0^{\pi/2}\left(1-\sin^2 x\right)\cos x dx
$$

なので，$t=\sin x$ とおくと，$\dfrac{dt}{dx}=\cos x$ より $\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{1}{\cos x}$ となる。$x:0\to\dfrac{\pi}{2}$ のとき $t:0\to 1$ なので

$$
\begin{aligned}
2\int_0^{\pi/2}\left(1-\sin^2 x\right)\cos x dx &= 2\int_0^1(1-t^2)\cos x\frac{1}{\cos x}dt\\
&= 2\int_0^1\left(1-t^2\right)dt\\
&= 2\left[t-\frac{1}{3}t^3\right]_0^1=\frac{4}{3}
\end{aligned}
$$