

演習問題 5.9 次の積分値を求めよ。

$$(1) \iiint_D y dx dy dz \quad D = \{x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$$

$$(2) \iiint_D z dx dy dz \quad D = \{0 \leq x \leq y^2, z \leq y \leq 2z, 0 \leq z \leq 1\}$$

$$(3) \iiint_D z^2 dx dy dz \quad D = \left\{ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1 \right\} \quad (a, b, c > 0)$$

$$(4) \iiint_D (x + y^2 z) dx dy dz \quad S = \{0 \leq z \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq 1, x \geq 0\}$$

$$(1) \quad D = \{0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq \sqrt{1-x^2}, 0 \leq z \leq \sqrt{1-x^2-y^2}\} \text{ なので}$$

$$\begin{aligned} \iiint_D y dx dy dz &= \int_0^1 \left\{ \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \left\{ \int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} y dz \right\} dy \right\} dx \\ &= \int_0^1 \left\{ \int_0^{\sqrt{1-x^2}} y \sqrt{1-x^2-y^2} dy \right\} dx \\ &= \frac{1}{3} \int_0^1 (1-x^2) \sqrt{1-x^2} dx \\ &= \frac{14\pi}{16} \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} \iiint_D z dx dy dz &= \int_0^1 \left\{ \int_z^{2z} \left\{ \int_0^{y^2} z dx \right\} dy \right\} dz \\ &= \int_0^1 \left\{ \int_z^{2z} zy^2 dy \right\} dz \\ &= \int_0^1 \frac{7z^4}{3} dz \\ &= \frac{7}{15} \end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned} \iiint_D z^2 dx dy dz &= \int_{-a}^a \left\{ \int_{-a\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}}}^{a\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}}} \left\{ \int_{-c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}}^{c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}} z^2 dz \right\} dy \right\} dx \\ &= \frac{4abc^3\pi}{15} \end{aligned}$$

(4) $D = \{0 \leq x \leq 1, -\sqrt{1-x^2} \leq y \leq \sqrt{1-x^2}, 0 \leq z \leq \sqrt{x^2+y^2}\}$ なので

$$\begin{aligned} \iiint_D (x+y^2z) dx dy dz &= \int_0^1 \left\{ \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \left\{ \int_0^{\sqrt{x^2+y^2}} (x+y^2z) dz \right\} dy \right\} dx \\ &= \int_0^1 \left\{ \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \left(x\sqrt{x^2+y^2} + \frac{y^2(x^2+y^2)}{2} \right) dy \right\} dx \end{aligned}$$

となり,

$$\int_0^1 \left(x\sqrt{1-x^2} + x^3 \log(\sqrt{1-x^2} + 1) + \frac{(1-x^2)^{5/2}}{2} + \frac{x^2(1-x^2)^{3/2}}{3} - \frac{1}{2}x^3 \log(x^2) \right) dx$$

となる。これを積分して

$$\frac{29}{48} + \frac{\pi}{24}$$

を得る。

演習問題 5.10 積分 $I = \iiint_D z^2 dx dy dz$ ($D = \left\{ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1 \right\}$ ここで $a, b, c > 0$ とする) を考える (演習問題 5.9 (3) の問題)。

- (1) $x = au, y = bv, z = cw$ において変数変換せよ。
- (2) さらに極座標に変換し積分を求めよ。

変数変換の条件では結果だけを述べている。実際に成立している事のチェックは各自行う事 (後の問題も同様)。

- (1) $\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} = abc$ なので, uvw -空間の領域 D' を $D' = \{u^2 + v^2 + w^2 \leq 1\}$ とおくとこの対応で D と D' は一対一に対応し, $\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} = 0$ となる点はない。よって変数変換の条件を満たしている。

$$\begin{aligned} I &= \iiint_D z^2 dx dy dz \\ &= \iiint_{D'} (cw)^2 abc du dv dw \\ &= abc^3 \iiint_{D'} w^2 du dv dw \end{aligned}$$

- (2) $u = r \sin \theta \cos \varphi, v = r \sin \theta \sin \varphi, w = r \cos \theta$ とおく。 $r\theta\varphi$ -空間の領域 E を $E = \{0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}$ とおく。 $\frac{\partial(u, v, w)}{\partial(r, \theta, \varphi)} = r^2 \sin \theta$ なので, D' と E は面積 0 の部分を除いて一対一であり, 面積 0 の部分を除いて $\frac{\partial(u, v, w)}{\partial(r, \theta, \varphi)} \neq 0$ である。よって変数変換の条件を満たしている。

$$\begin{aligned} I &= abc^3 \iiint_E r^2 \cos^2 \theta r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi \\ &= \frac{4abc^3\pi}{15} \end{aligned}$$

演習問題 5.11 $D = \{0 < x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$ のとき次の広義積分

$$I = \iiint_D \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2} dx dy dz$$

を計算せよ。

D の近似増加列として, $A_n = \left\{ \frac{1}{n^2} \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 1 \right\}$ をとる。 $x = r \sin \theta \cos \varphi, y = r \sin \theta \sin \varphi,$
 $z = r \cos \theta$ とおくと $\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, \varphi)} = r^2 \sin \theta$ である。 $E_n = \left\{ \frac{1}{n} \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi \right\}$ と
 おくと A_n と E_n は面積 0 の部分を除いて一対一に対応しており, ヤコビアンが 0 になる領域は
 面積 0 である。よって変数変換の条件を満たしているので,

$$\begin{aligned} I_n &= \iiint_{A_n} \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2} dx dy dz \\ &= \iiint_{E_n} \frac{1}{r^2} r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi = \iiint_{E_n} \sin \theta dr d\theta d\varphi \\ &= \int_{\frac{1}{n}}^1 \left\{ \int_0^\pi \left\{ \int_0^{2\pi} \sin \theta d\varphi \right\} d\theta \right\} dr \\ &= 2\pi \int_{\frac{1}{n}}^1 \left\{ \int_0^\pi \sin \theta d\theta \right\} dr \\ &= 4\pi \int_{\frac{1}{n}}^1 dr = 4\pi \left(1 - \frac{1}{n} \right) \end{aligned}$$

よって

$$I = \lim_{n \rightarrow \infty} I_n = 4\pi$$

演習問題 5.12 半径 r の球の体積を求めよ。 $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq r^2\}$ とし, $f(x, y) = \sqrt{r^2 - x^2 - y^2}, g(x, y) = -\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}$ と考えよ。

$x = s \cos \theta, y = s \sin \theta$ とおくと s の部分は r と置きたいのだが, **すでに r が定数として使われているので s と置いた。** $\frac{\partial(x, y)}{\partial(s, \theta)} = s$ である。 $E = \{0 \leq s \leq r, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$ とおくと D と E は
 面積 0 の部分を除いて一対一に対応し, ヤコビアンが 0 になる領域の面積も 0 である。よって変
 数変換の条件を満たしている。

$$\begin{aligned} V &= \iint_D \left(\sqrt{r^2 - x^2 - y^2} - \left(-\sqrt{r^2 - x^2 - y^2} \right) \right) dx dy \\ &= 2 \iint_E \sqrt{r^2 - s^2} s ds d\theta \\ &= 2 \int_0^r \left\{ \int_0^{2\pi} s \sqrt{r^2 - s^2} d\theta \right\} ds \\ &= 4\pi \int_0^r s \sqrt{r^2 - s^2} ds = \frac{4\pi r^3}{3} \end{aligned}$$

演習問題 5.13 $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}$ を x 軸のまわりに回転させてできる回転体の体積を上の方法で求めよ。

$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}$ が xyz -空間の中の xy -平面に入っていると考え、 x -軸の回りに C を回転させてできる領域を D とする。 $D = \{a \leq x \leq b, \sqrt{y^2 + z^2} \leq f(x)\}$ と表される。 D の体積を $\text{Vol}(D)$ とすると、

$$\text{Vol}(D) = \iiint_D dx dy dz$$

である。 $x = x, y = r \cos \theta, z = r \sin \theta$ と置くと、 $\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(x, r, \theta)} = r$ である。

$$E = \{(x, r, \theta) \in \mathbb{R}^3 \mid a \leq x \leq b, 0 \leq r \leq f(x), 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$$

とおくと、この対応で体積 0 の領域を除いて一対一であり、体積 0 の領域を除いてヤコビアンは 0 ではない。よって変数変換の条件を満たしているので、

$$\begin{aligned} \text{Vol}(D) &= \iiint_D dx dy dz \\ &= \iiint_E r dx dr d\theta \\ &= \int_a^b \left\{ \int_0^{f(x)} \left\{ \int_0^{2\pi} r d\theta \right\} dr \right\} dx \\ &= \int_a^b \left\{ \int_0^{f(x)} 2\pi r dr \right\} dx \\ &= \pi \int_a^b \left\{ \left[r^2 \right]_{r=0}^{f(x)} \right\} dx \\ &= \pi \int_a^b \{f(x)\}^2 dx \end{aligned}$$

演習問題 5.14 一様な密度をもつ半球体 $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq r^2, x \geq 0\}$ の重心の位置を求めよ。

$x = s \sin \theta \cos \varphi, y = s \sin \theta \sin \varphi, z = s \cos \theta$ とおく。 $E = \{0 \leq s \leq r, 0 \leq \theta \leq \pi, -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}\}$ に対し、この対応で面積 0 の領域を除いて D と一対一に対応しており、ヤコビアンが 0 の面積も 0 である。よって変数変換の条件を満たしている。

$$\begin{aligned} K &= \iiint_D dx dy dz \\ &= \iiint_E s^2 \sin \theta ds d\theta d\varphi \\ &= \frac{2\pi r^3}{3} \end{aligned}$$

である。

$$\begin{aligned}\iiint_D x dx dy dz &= \iiint_E x ds d\theta d\varphi \\ &= \int_0^r \left\{ \int_0^\pi \left\{ \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} s \sin \theta \cos \varphi s^2 \sin \theta d\varphi \right\} d\theta \right\} ds \\ &= \int_0^r s^3 ds \int_0^\pi \sin^2 \theta d\theta \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \varphi d\varphi \\ &= \frac{r^4}{4} \frac{\pi}{2} 2 = \frac{\pi r^4}{4}\end{aligned}$$

同様に計算して $\iiint_D y dx dy dz = 0$, $\iiint_D z dx dy dz = 0$ が分かる。よって重心は

$$\left(\frac{3}{8}r, 0, 0 \right)$$

である。