解析学 I 要綱 #5

2006–11–9 河野

1.7 高次導関数と Taylor の定理

導関数が微分可能なとき更にその導関数を考える事が出来る。それを高次導関数と呼ぶ。導関数の導関数を 2 次導関数または 2 階の導関数といい

$$\frac{d^2y}{dx^2}, \qquad f''(x)$$

と表す。n 次 (n 階の) 導関数は

$$\frac{d^ny}{dx^n}, \qquad f^{(n)}(x)$$

と表す。以下この節では関数は**何回でも微分可能**である事を仮定する。

テーラーの定理の導入として関数の近似を考える。$f(x+h)$ を近似する 1 次式 (x は固定し h を変数と考える) を $y = a + bh$ とすると，x の周りで近似が最もよいものは $a = f(x), b = f'(x)$ であった。2 次式 $y = a + bh + ch^2$ で近似した場合 "近似の度合のよいもの" はどれであろう。ここで "近似の度合のよいもの" とは $f(x+h) - (a + bh + ch^2) = \varepsilon h^2$ と置いたとき，$\lim_{h\to 0} \varepsilon = 0$ となるものを意味する事とする。$h = 0$ と置く事により $a = f(x)$ が分かる。$\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} = b + ch + \varepsilon h$ と置き $\varepsilon \to 0$ とする事により $b = f'(x)$ が分かる。次に $\dfrac{\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} - f'(x)}{h} = c + \varepsilon$ と変形すると左辺の $h \to 0$ とした極限が c になる事が分かる。ロピタルの定理より (ただし今変数は h と見倣しているので，微分も h に関する微分である事に注意)

$$\lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} - f'(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x) - f'(x)h}{h^2} = \lim_{h\to 0} \frac{f'(x+h) - f'(x)}{2h} = \frac{f''(x)}{2}$$

となる。よって近似の度合の最もよい 2 次式は $y = f(x) + f'(x)h + \dfrac{f''(x)}{2}h^2$ である。

演習問題 1.15 近似の度合の最もよい 3 次式を求めよ。ただし 3 次式 $y = a + bh + ch^2 + dh^3$ が近似の度合が最もよいとは $f(x+h) - (a + bh + ch^2 + dh^3) = \varepsilon h^3$ と置いたとき $\lim_{h\to 0} \varepsilon = 0$ が成立する事をいう。

近似の度合の最もよい 4 次式を求めよ。ただし 4 次式 $y = a + bh + ch^2 + dh^3 + eh^4$ が近似の度合が最もよいとは $f(x+h) - (a + bh + ch^2 + dh^3 + eh^4) = \varepsilon h^4$ と置いたとき $\lim_{h\to 0} \varepsilon = 0$ が成立する事をいう。

次の定理は 'Taylor の定理' と呼ばれ色々な応用がある。

このプリントも含め講義関連のプリントは http://math.cs.kitami-it.ac.jp/~kouno/kougi.html においてある。

定理 1.26 [Taylor(テーラー) の定理]

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1} + \frac{f^{(n)}(a+\theta(x-a))}{n!}(x-a)^n$$

を満たす θ $(0 < \theta < 1)$ が存在する。$R_n = \dfrac{f^{(n)}(a+\theta(x-a))}{n!}(x-a)^n$ を**剰余項**と呼ぶ。

証明　天下りではあるが，$R = f(x) - \left(\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k\right)$ と置き，

$$F(X) = f(x) - \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(X)}{k!}(x-X)^k\right) - \frac{R}{(x-a)^n}(x-X)^n$$

と置く。このとき，$F(a) = 0, F(x) = 0$ が成立するのでロルの定理より $F'(c) = 0$ ($a < c < x$ または $x < c < a$) となる c が存在する。$\theta = \dfrac{c-a}{x-a}$ と置くと定理が得られる。∎

定理 1.26 は次の形でも述べることができる。

系 1.27 任意の h に対しある θ $(0 < \theta < 1)$ が存在して

$$f(a+h) = f(a) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}h^k + \frac{f^{(n)}(a+\theta h)}{n!}h^n$$

と表せる。

任意の x に対し a と x の間に c が存在して

$$f(x) = f(a) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-a)^n$$

Taylor の定理の最初の応用として極値に関する次の定理を得る。

定理 1.28 $f'(a) = \cdots = f^{(n-1)}(a) = 0,\ f^{(n)}(a) \neq 0$ とする。

(1) n が偶数のとき $f(x)$ は $x = a$ で極値をとる。

1) $f^{(n)}(a) > 0$ のとき $f(a)$ は極小である。

2) $f^{(n)}(a) < 0$ のとき $f(a)$ は極大である。

(2) n が奇数のとき $f(x)$ は $x = a$ で極値をとらない。

1) $f^{(n)}(a) > 0$ のとき $f(a)$ は増加の状態にある。

2) $f^{(n)}(a) < 0$ のとき $f(a)$ は減少の状態にある。

証明　(1), (2) とも 1) の場合のみ示す。$f^{(n)}$ 連続かつ $f^{(n)}(a) > 0$ なので a を含むある区間 $(a-\delta, a+\delta)$ において $f^{(n)}(x) > 0$ となる。この区間内の x についてテーラーの定理を適用すると $f'(a) = \cdots = f^{(n-1)}(a) = 0$ なので $f(x) = f(a) + \dfrac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-a)^n$ となる。(1) 即ち n が偶数の場合 $x \neq a$ ならば $(x-a)^n > 0$ なので，$f(x) - f(a) > 0$ 即ち $f(x) > f(a)$ となる。よって f は $x = a$ で極小である。(2) 即ち n が奇数の場

合 $x > a$ なら $(x-a)^n > 0$, $x-a < 0$ ならば $(x-a)^n < 0$ である。よって $x > a$ ならば $f(x) > f(a)$, $x < a$ ならば $f(x) < f(a)$ となっている。 ∎

Taylor の定理の 2 番目の応用として近似がある。この定理は線型近似より一般的にはよりよい近似を与える。$n=2$ の場合を考えてみよう。$n=2$ の場合系 1.27 の形で述べると,

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(c)}{2!}(x-a)^2$$

$f''(x)$ の有界性を仮定しているので, $x-a$ が非常に小さいとき, 最後の項は (**非常に**)^2 小さい。よってこの項を無視して考える。これは線型近似を与える。

次に $n=3$ の場合を考える。

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(c)}{3!}(x-a)^3$$

$x-a$ が非常に小さいとき最後の項は (**非常に**)^3 小さい。この項を無視して $f(x)$ を

$$f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2$$

で近似する。これは線型近似より一般的にはよりよい近似になっている。

一般にテーラーの定理において剰余項を切り捨てた近似を考えることができる。例えば自然対数の底 e の近似計算を考える。$f(x) = e^x$ のとき, $f'(x) = e^x$ より, 任意の n に対し $f^{(n)}(x) = e^x$ となる。剰余項 R_{n+1} を切り捨てた近似式を $g_n(x)$ とすると

$$g_n(x) = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n$$

となる。$a_n = g_n(1)$ が e の近似値を与える。$n = 5, 6, 7, 8, 9, 10$ と計算すると

$$\begin{aligned}
a_5 = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} &= 2.716666667 \\
a_6 = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} &= 2.718055556 \\
a_7 = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} + \frac{1}{7!} &= 2.718253968 \\
a_8 = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} + \frac{1}{7!} + \frac{1}{8!} &= 2.718278770 \\
a_9 = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} + \frac{1}{7!} + \frac{1}{8!} + \frac{1}{9!} &= 2.718281526 \\
a_{10} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} + \frac{1}{7!} + \frac{1}{8!} + \frac{1}{9!} + \frac{1}{10!} &= 2.718281801
\end{aligned}$$

となる。テーラーの定理を用いた近似のよい点として誤差の評価が容易である事があげられる。剰余項が誤差となるので, その最大値が最大誤差となる。

テーラー展開において剰余項 $R_n = \dfrac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-a)^n$ が $\displaystyle\lim_{n\to\infty} R_n = 0$ となるとき, 関数は

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

と表すことができる。これをテーラー級数と言い，このとき $f(x)$ は $x=a$ でテーラー (級数) 展開可能であるという。

今 $f(x)=e^x$ が $x=0$ でテーラー展開可能である事は仮定しておく。$f^{(n)}(0)=e^0=1$ なのでテーラー級数は

$$1+x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3+\cdots+\frac{1}{n!}x^n+\cdots$$

となる。

$f(x)=\sin x$ のときは，$f'(x)=\cos x$, $f''(x)=-\sin x$, $f'''(x)=-\cos x$, $f''''(x)=\sin x\ldots$ より，テーラー級数は

$$x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{(2n-1)!}x^{2n-1}+\cdots$$

となる。

$\cos x$ のテーラー級数は

$$1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4+\cdots+(-1)^n\frac{1}{(2n)!}x^{2n}+\cdots$$

となる。

e^x の級数展開の x に形式的に ix (i は虚数単位即ち $\sqrt{-1}$) を代入する事により，オイラーは次のオイラーの公式を導いた。

$$e^{ix}=\cos x+i\sin x$$

オイラーの公式と指数法則を知っていれば 3 角関数の加法定理は自然に出て来る。オイラーの公式より $e^{ix}=\cos x+i\sin x$，$e^{iy}=\cos y+i\sin y$，$e^{i(x+y)}=\cos(x+y)+i\sin(x+y)$ を得る。$e^{i(x+y)}=e^{ix}e^{iy}$ なので，

$$\begin{aligned}\cos(x+y)+i\sin(x+y) &= (\cos x+i\sin x)(\cos y+i\sin y)\\ &= (\cos x\cos y-\sin x\sin y)+i(\sin x\cos y+\cos x\sin y)\end{aligned}$$

この式の実部同士，虚部同士を比較すると加法定理が得られる。

演習問題 1.16　次の関数の $x=0$ におけるテーラー級数を求めよ (テーラー展開可能であることは仮定してよい)。

(1) $f(x)=\log(1+x)$　　(2) $f(x)=\dfrac{1}{1-x}$

(3) $f(x)=\sqrt{1+x}$　　(4) $f(x)=\dfrac{1}{1+x}$

(5) $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$

演習問題 1.17　次の関数を $x=a$ でテーラー (級数) 展開せよ (テーラー展開可能であることは仮定してよい)。

(1) $f(x)=x^5\quad(a=1)$　　(2) $f(x)=e^x\quad(a=1)$

(3) $f(x)=\sin x\quad(a=\pi)$　　(4) $f(x)=\log x\quad(a=1)$