解析学 I 要綱 #7　　2006–11–17　　河野

2.4　合成関数の導関数

合成関数の導関数は次の様になる。

定理 2.11 $z = f(x, y), x = x(t), y = y(t)$ の時，z を t で微分した導関数は次で与えられる。

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

次の形の様に行列で考えた方が分かりやすいかもしれない。

定義 2.12 2 変数関数の組 $x = x(s, t)$, $y = y(s, t)$ に対し

$$\frac{D(x, y)}{D(s, t)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial x}{\partial t} \\ \frac{\partial y}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial t} \end{pmatrix}$$

をこの関数（の組）の**ヤコビ行列**といい，この行列の行列式を

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(s, t)} = \det\left(\frac{D(x, y)}{D(s, t)}\right)$$

で表わし，**ヤコビアン** (**ヤコビ行列式**) という。

定理 2.13 2 つの関数の組 $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$ と $u = u(s, t)$, $v = v(s, t)$ に対し

$$\frac{D(x, y)}{D(s, t)} = \frac{D(x, y)}{D(u, v)}\frac{D(u, v)}{D(s, t)}$$

が成立する。

特に逆関数に関しては

$$\frac{D(u, v)}{D(x, y)} = \left(\frac{D(x, y)}{D(u, v)}\right)^{-1}$$

となる。

演習問題 2.4　次の場合に $\dfrac{D(x, y)}{D(u, v)}$ 及び $\dfrac{D(u, v)}{D(x, y)}$ を求めよ。

(1) $x = v^2, y = u^2$　　(2) $x = u^2 - v^2, y = 2uv$

(3) $x = u\cos v, y = u\sin v$　　(4) $x = u, y = u + v$

演習問題 2.5　次の関数に対し $\dfrac{\partial z}{\partial s}, \dfrac{\partial z}{\partial t}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial s^2}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial t^2}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial s \partial t}$ を求めよ。

(1) $z = x + y^2$,$s = x + y, t = xy$　　(2) $z = x + y$,$s = x^2 + y^2, t = x^2y^2$

(3) $z = x + y, s = x^2 + y^2, t = xy$　　(4) $z = x + y, s = x^2 - y^2, t = 2xy$

(5) $z = xy, s = x, t = x + y$　　(6) $z = xy, s = x\cos y, t = x\sin y$

このプリントも含め講義関連のプリントは http://math.cs.kitami-it.ac.jp/~kouno/kougi.html においてある。

演習問題 2.6 　$x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$ とする (2 次元の極座標表示)。ヤコビ行列 $\dfrac{D(x,y)}{D(r,\theta)}$ および ヤコビアン $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}$ を計算し，関数 $z = f(x,y)$ に対し次を示せ。

(1) $\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = \left(\dfrac{\partial z}{\partial r}\right)^2 + \left(\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2$

(2) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial z}{\partial r} + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 z}{\partial \theta^2}$

演習問題 2.7

(1) $x = u\cos\alpha - v\sin\alpha,\ y = u\sin\alpha + v\cos\alpha$ (α は定数) のとき次を示せ。

　1) $z_x^2 + z_y^2 = z_u^2 + z_v^2$

　2) $z_{xx} + z_{yy} = z_{uu} + z_{vv}$

(2) $x + y = e^{u+v},\ x - y = e^{u-v}$ に対し $z_{xx} - z_{yy} = e^{-2u}(z_{uu} - z_{vv})$ が成立することを示せ。

(3) $x + y = u,\ y = uv$ ならば $xz_{xx} + yz_{xy} + z_x = uz_{uu} - vz_{uv} + z_u$ となる事を示せ。

2.5　3 変数関数の微分

今まで 2 変数関数の微分について学んだ。ここでは 3 変数関数について見る。2 変数関数の場合とほとんど平行に議論が進む事が確認出来る。

定義 2.14 関数 $y = f(x_1, x_2, x_3)$ が $(x_1, x_2, x_3) = (a_1, a_2, a_3)$ で x_1 に関して**偏微分可能**とは

$$\lim_{h \longrightarrow 0} \frac{f(a_1 + h, a_2, a_3) - f(a_1, a_2, a_3)}{h}$$

が収束する事を言う。x_2, x_3 にかんしても同様に定義できる。

x_1, x_2 及び x_3 に関して偏微分可能の時，単に**偏微分可能**と言う。各点で偏微分可能の時 1 変数と同じ様に導関数を考える事ができる。これらを x_1 に関する (または x_2, x_3 に関する) 偏導関数と言う。x_1 に関する偏導関数は

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} \qquad \frac{\partial y}{\partial x_1} \qquad f_{x_1} \qquad z_{x_1}$$

等書かれる。

3 変数関数の場合全微分可能性は幾何的には「接空間の存在」を意味する。

定義 2.15 $y = f(x_1, x_2, x_3)$ は点 (a_1, a_2, a_3) のまわりで定義されていて，(a_1, a_2, a_3) で微分可能とする。

$\varepsilon(h_1, h_2, h_3) =$

$$\frac{f(a_1 + h_1, a_2 + h_2, a_3 + h_3) - f(a_1, a_2, a_3) - \dfrac{\partial f}{\partial x_1}(a_1, a_2, a_3)h_1 - \dfrac{\partial f}{\partial x_2}(a_1, a_2, a_3)h_2 - \dfrac{\partial f}{\partial x_3}(a_1, a_2, a_3)h_3}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2 + h_3^2}}$$

とおく。$f(x_1, x_2, x_3)$ が (a_1, a_2, a_3) で**全微分可能**とは

$$\lim_{(h_1, h_2, h_3) \longrightarrow (0,0,0)} \varepsilon(h_1, h_2, h_3) = 0$$

となる時をいう。

合成関数に関しても 2 変数と同様の結果が成立する。

定理 2.16 $y = f(x_1, x_2, x_3)$, $x_1 = x_1(t)$, $x_2 = x_2(t)$, $x_3 = x_3(t)$ のとき

$$\frac{dy}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial z}{\partial x_2}\frac{dx_2}{dt} + \frac{\partial z}{\partial x_3}\frac{dx_3}{dt}$$

定義 2.17 3 変数関数 3 個の組 $x_1 = x_1(t_1, t_2, t_3)$, $x_2 = x_2(t_1, t_2, t_3)$, $x_3 = x_3(t_1, t_2, t_3)$ に対し

$$\frac{D(x_1, x_2, x_3)}{D(t_1, t_2, t_3)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial t_1} & \frac{\partial x_1}{\partial t_2} & \frac{\partial x_1}{\partial t_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial t_1} & \frac{\partial x_2}{\partial t_2} & \frac{\partial x_2}{\partial t_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial t_1} & \frac{\partial x_3}{\partial t_2} & \frac{\partial x_3}{\partial t_3} \end{pmatrix}$$

をこの関数 (の組) のヤコビ行列という。この行列の行列式を

$$\frac{\partial(x_1, x_2, x_3)}{\partial(t_1, t_2, t_3)} = \det\left(\frac{D(x_1, x_2, x_3)}{D(t_1, t_2, t_3)}\right)$$

で表し，ヤコビアンという。

定理 2.18 3 つの関数の組 $x_1 = x_1(u_1, u_2, u_3)$, $x_2 = x_2(u_1, u_2, u_3)$, $x_3 = x_3(u_1, u_2, u_3)$ と $u_1 = u_1(t_1, t_2, t_3)$, $u_2 = u_2(t_1, t_2, t_3)$, $u_3 = u_3(t_1, t_2, t_3)$ に対し

$$\frac{D(x_1, x_2, x_3)}{D(t_1, t_2, t_3)} = \frac{D(x_1, x_2, x_3)}{D(u_1, u_2, u_3)}\frac{D(u_1, u_2, u_3)}{D(t_1, t_2, t_3)}$$

が成立する。特に逆関数に関しては

$$\frac{D(u_1, u_2, u_2)}{D(x_1, x_2, x_3)} = \left(\frac{D(x_1, x_2, x_3)}{D(u_1, u_2, u_3)}\right)^{-1}$$

となる。

演習問題 2.8　次の関数の偏導関数を求めよ。

(1) $w = f(x, y, z) = x^2y^3z^4$　　(2) $w = xyz\sin(x^2 + y^2 + z^2)$

(3) $e^{x^2+y^3+z^4}$　　(4) $x^2y^3\log(x^2 + y^3 + z^4)$

演習問題 2.9　次の場合に $\dfrac{D(x, y, z)}{D(u, v, w)}$ 及び $\dfrac{D(u, v, w)}{D(x, y, z)}$ を求めよ。

(1) $x = v^2, y = w^2, z = u^2$　　(2) $x = u^2 - v^2 + w^2, y = 2uv, z = 2uw$

(3) $x = u\cos v, y = u\sin v, z = u + w$　　(4) $x = u, y = u + v, z = u + v + w$

演習問題 2.10　次の関数に対し $\dfrac{\partial w}{\partial s}, \dfrac{\partial w}{\partial t}, \dfrac{\partial w}{\partial u}, \dfrac{\partial^2 w}{\partial s^2}, \dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \dfrac{\partial^2 w}{\partial u^2}, \dfrac{\partial^2 w}{\partial s\partial t}$ を求めよ。

(1) $w == x^3 + y^3 + z^3$,$x + y + z = s, xy + yz + zx = t, xyz = u$

(2) $w = x + y + z$,$x^2 + y^2 + z^2 = s, xyz = t, xy + yz + zx = u$

演習問題 2.11　$x = r\sin\theta\cos\varphi,\ y = r\sin\theta\sin\varphi,\ z = r\cos\theta$ とする (3 次元の極座標表示)。関数 $w = f(x, y, z)$ に対し次を示せ。

(1) ヤコビアン $\dfrac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, \varphi)}$ を計算せよ。

(2) $\left(\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial w}{\partial y}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial w}{\partial z}\right)^2 = \left(\dfrac{\partial w}{\partial r}\right)^2 + \left(\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial w}{\partial \theta}\right)^2 + \left(\dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial w}{\partial \varphi}\right)^2$

(3) $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial z^2} = \dfrac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \dfrac{2}{r}\dfrac{\partial w}{\partial r} + \dfrac{1}{r^2\sin\theta}\dfrac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\dfrac{\partial w}{\partial \theta}\right) + \dfrac{1}{r^2\sin^2\theta}\dfrac{\partial w}{\partial \varphi}$