解析学 I 要綱 #9　　2006–12–21　河野

3 1変数関数の不定積分

これから積分を扱っていくが，最初に定積分と不定積分の違いに関して述べておく。高校では不定積分 (原始関数) を用いて定積分が定義されていた。これは便法と考えるべきで，厳密には正しい定義とは言えない。

不定積分は微分の逆として定義されるものであるが，定積分は求積法と関係して定義されるものであり，直接は不定積分とは無関係である。定義としては無関係の両者の関係にニュートン・ライプニッツが独立に気づいたとき微積分学が成立したといえる。この事は解析学 II で定積分の定義のときにもう一度ふれるが，この事をきちんと理解する事が積分の理論的把握のキーポイントである。

3.1 定義と諸性質

関数 $F(x)$ が微分可能で

$$\frac{d}{dx}F(x) = f(x)$$

となるとき，$F(x)$ を $f(x)$ の**原始関数** (*primitive function*) または**不定積分** (*indefinite integral*) といい,

$$\int f(x)dx = F(x)$$

と表す。原始関数は $f(x)$ から一意的に決まるものではない。しかし次の命題から定数分の差しかない事が分かる。

命題 3.1 2 つの関数 $F(x)$, $G(x)$ が $F'(x) = G'(x)$ を満たせばある定数 C が存在して $G(x) = F(x) + C$ が成立する。

例えば $\left(\frac{1}{3}x^3 + C\right)' = x^2$ なので

$$\int x^2 dx = \frac{1}{3}x^3 + C$$

となる。この C を積分定数と呼ぶが，この講義ではなければ混乱する場合を除き通常省略する。またこの章の以下の部分で関数は積分可能であることを仮定し，そのことをいちいち断らないこととする。

命題 3.2 [**積分の線型性**]

(1) $\displaystyle\int \{f(x) + g(x)\}\, dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$

(2) $\displaystyle\int af(x)dx = a\int f(x)dx$

このプリントも含め講義関連のプリントは http://math.cs.kitami-it.ac.jp/~kouno/kougi.html においてある。

命題 3.3 [**いくつかの関数の不定積分**]

(1) $\displaystyle\int x^a dx = \frac{1}{a+1}x^{a+1} \quad (a \neq -1)$　(2) $\displaystyle\int \frac{1}{x}dx = \log|x|$

(3) $\displaystyle\int \cos x dx = \sin x$　(4) $\displaystyle\int \sin x dx = -\cos x$

(5) $\displaystyle\int e^x dx = e^x$　(6) $\displaystyle\int a^x dx = \frac{a^x}{\log a}$

(7) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \arcsin x$　(8) $\displaystyle\int \frac{1}{1+x^2}dx = \arctan x$

これらの命題はすべて微分法の対応する公式を積分の言葉に直すと出てくる。例えば $\displaystyle\int \{f(x)+g(x)\}\,dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$ を示すには，$F(x) = \displaystyle\int f(x)dx$，$G(x) = \displaystyle\int g(x)dx$ とおくと，$F'(x) = f(x)$，$G'(x) = g(x)$ である。このとき $(F(x)+G(x))' = F'(x)+G'(x) = f(x)+g(x)$ より $\displaystyle\int \{f(x)+g(x)\}\,dx = F(x)+G(x) = \int f(x)dx + \int g(x)dx$ が得られる。

$a \neq -1$ のとき $\left(\dfrac{1}{a+1}x^{a+1}\right)' = x^a$ なので $\displaystyle\int x^a dx = \frac{1}{a+1}x^{a+1}$ を得る。微分法の公式と積分法の公式を丸暗記して混乱する人もいるが，その様な人に対しては (丸暗記を推奨する分けではないが，かりに丸暗記をするとしたら)「微分法の公式だけにして，積分法は微分法から導いたほうがよい」と言っておこう。

演習問題 3.1　命題 3.2 及び命題 3.3 を証明せよ。

3.2 置換積分法と部分積分法

積分の計算は微分の計算に比べ一般に難しい。計算の方法として次の 2 つがある。

定理 3.4 [**置換積分法**] $x = \varphi(t)$ とすると，

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

証明　$\displaystyle\int f(x)dx = F(x)$ のとき $\dfrac{d}{dx}F(x) = f(x)$ である。合成関数の微分法により $\dfrac{d}{dt}F(\varphi(t)) = \dfrac{d\varphi(t)}{dt}\dfrac{d}{dx}F(x) = \dfrac{d\varphi(t)}{dt}f(x)$ なので

$$\int f(\varphi(t))\frac{d\varphi(t)}{dt}dt = F(\varphi(t)) = F(x) = \int f(x)dx$$

を得る。∎

置換積分は色々な場合に色々な形の変数変換が考案されている。詳しくは次節で扱うがここでは幾つかの例を見ておこう。

最初に変数が 1 次式になっている形の積分を考える。$I = \displaystyle\int \cos(2x+3)dx$ を考える。$t = 2x+3$ と置くと，$\dfrac{dt}{dx} = 2$ なので，$dx = \dfrac{1}{2}dt$ である。よって

$$I = \int \cos t \frac{1}{2}dt = \frac{1}{2}\int \cos t dt = \frac{1}{2}\sin t = \frac{1}{2}\sin(2x+3)$$

次に置換積分の特徴的な形として $I = \int u' f(u) dx$ という形の積分を見よう。最初は対数型 $\int \frac{u'}{u} dx$ の積分。

$I = \int \frac{x}{1+x^2} dx$ を考える。$t = 1 + x^2$ とおくと，$\frac{dt}{dx} = 2x$ なので，$dx = \frac{1}{2x} dt$，よって

$$I = \int \frac{x}{1+x^2} dx = \int \frac{x}{t} \frac{1}{2x} dt = \frac{1}{2} \int \frac{1}{t} dt = \frac{1}{2} \log t = \frac{1}{2} \log(1 + x^2)$$

対数型 2 番目：$\int \tan x dx$ を考える。$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ なので $u = \cos x$ とおくと，$\frac{du}{dx} = -\sin x$ より $dx = -\frac{1}{\sin x} du$ である。よって

$$I = -\int \frac{\sin x}{u} \frac{1}{\sin x} du = -\int \frac{1}{u} du = -\log |u| = -\log |\cos x|$$

非対数型：$I = \int \cos x \sin^n x dx$ を考える。$s = \sin x$ とおくと $\frac{ds}{dx} = \cos x$ なので

$$I = \int \cos x \sin^n x dx = \int \cos x \, s^n \frac{1}{\cos x} ds = \int s^n ds = \frac{1}{n+1} s^{n+1} = \frac{1}{n+1} \sin^{n+1} x$$

定理 3.5 [**部分積分法**]

$$\int f'(x) g(x) dx = f(x) g(x) - \int f(x) g'(x) dx$$

証明　定義より任意の微分可能な関数 $h(x)$ に対し

$$\int h'(x) dx = h(x)$$

が成立している。$\frac{d}{dx} (f(x)g(x)) = \frac{d}{dx} f(x) g(x) + f(x) \frac{d}{dx} g(x)$ の両辺を積分すると

$$f(x) f(x) = \int f'(x) g(x) dx + \int f(x) g'(x) dx$$

を得る。これを移項すると定理が得られる。∎

定理は移項すると

$$\int f(x) g'(x) dx = f(x) g(x) - \int f'(x) g(x) dx$$

の形になる。実際に適応するときは，どちらを微分されたものと考えるかで 2 通り方法がある。次の例は最初は後者，次は前者の形の適応である。

$$\begin{aligned}
\int x e^x dx &= \int x (e^x)' dx = x e^x - \int (x)' e^x dx = x e^x - \int e^x dx = x e^x - e^x \\
\int x \log x dx &= \int \left(\frac{1}{2} x^2 \right)' \log x dx = \frac{1}{2} x^2 \log x - \int \frac{1}{2} x^2 \frac{1}{x} dx = \frac{1}{2} x^2 \log x - \frac{1}{4} x^2
\end{aligned}$$

部分積分を 2 回実行する必要のある次の様な形の積分もある。

$$\begin{aligned}\int x^2e^x dx &= \int x^2(e^x)' dx = x^2e^x - \int (x^2)'e^x dx = x^2e^x - \int 2xe^x dx \\ &= x^2e^x - 2\int xe^x dx = x^2e^x - 2xe^x + 2e^x\end{aligned}$$

また $1 = (x)'$ と考える言わば退化した形で用いられる積分もある。

$$\int \log x dx = \int (x)' \log x dx = x\log x - \int x\frac{1}{x}dx = x\log x - x$$

演習問題 3.2　次の関数の不定積分を求めよ。

(1) $(2x+5)^6$	(2) e^{-2x}	(3) $\sin\dfrac{x}{2}$	(4) $x(3x^2+1)^8$
(5) $\dfrac{x}{(1+x^2)^3}$	(6) xe^{3x}	(7) $x\sin x$	(8) $x^2\cos x$
(9) $x^3\log x$	(10) $(\log x)^2$	(11) $\arctan x$	(12) $\arcsin x$

重要な注意：不定積分において計算は一般に大変であるが，**検算**は簡単である。求めた関数を微分して元の被積分関数になればよい。**必ず検算をする事**!!

3.3　諸計算

この節では積分計算の幾つかの技法を紹介する。特に最初に紹介する有理関数の積分は実際的にも・理論的にも重要である。

$\boxed{1}$ 有理関数の不定積分

有理関数は 2 次式または 1 次式に因数分解できれば，積分を我々の知っている関数 (初等関数) で書く事ができる。積分方法を一般的に述べるのではなく，具体例を取り上げて積分方法が分かる様に実行する事とする。$I = \displaystyle\int \frac{x^4+x^3-x-4}{x^3-1}dx$ を例にとる。

(1) 仮分数を帯分数へ

最初に分子の次数が分母の次数より大きければ帯分数の形にして分子の次数を小さくする。

$$\frac{x^4+x^3-x-4}{x^3-1} = x+1-\frac{3}{x^3-1}$$

なので，$\dfrac{3}{x^3-1}$ の積分を求めればよい。

(2) 部分分数展開

部分分数展開をするために分母を因数分解する。

$$x^3-1 = (x-1)(x^2+x+1)$$

となる。x^2+x+1 は実数の範囲では 1 次式に因数分解できない。

$$\frac{3}{x^3-1} = \frac{a}{x-1} + \frac{bx+c}{x^2+x+1}$$

を満たす定数 a, b, c を見つける。分母を払うと $3 = a(x^2+x+1) + (bx+c)(x-1)$ が恒等的に成立しているので，$a = 1, b = -1, c = -2$ である。よって

$$\int \frac{3}{x^3-1} dx = \int \frac{1}{x-1} dx - \int \frac{x+2}{x^2+x+1} dx$$

となる。

(3) 積分の実行

$(x^2+x+1)' = 2x+1$ なので $\displaystyle\int \frac{2x+1}{x^2+x+1} dx = \log(x^2+x+1)$

$\displaystyle\frac{x+2}{x^2+x+1} = \frac{1}{2}\frac{2x+1}{x^2+x+1} + \frac{3}{2}\frac{1}{x^2+x+1}$ となるので，$\displaystyle\int \frac{1}{x^2+x+1} dx$ が求まればよい。$x^2+x+1 = \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$ となるので $u = x + \frac{1}{2}$ と変数変換すると $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+x+1} dx = \int \frac{1}{u^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} du = \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2}{\sqrt{3}} u = \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2}{\sqrt{3}} \left(x + \frac{1}{2}\right)$ となる。以上を合わせると

$$I = \frac{x^2}{2} + x - \log|x-1| + \frac{1}{2}\log(x^2+x+1) + \sqrt{3}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}}$$

(4) 少し理論的に

任意の有理関数の不定積分が初等関数で表されるかどうかを考えてみる。

一般の有理関数を $R(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ とする。(1) の操作で分子の次数は分母の次数より小さいと仮定してよい。次に $g(x)$ の因数分解を実行する。アルゴリズムは存在しないが，実数の範囲で 1 次式または 2 次式に因数分解される事が知られている (代数学の基本定理)。同じ因数が 2 個以上存在する場合もあるので，部分分数を実行すると，次の形の関数の和になっている。

$$\frac{f_1(x)}{(x+a)^n}, \qquad \frac{f_2(x)}{(x^2+ax+b)^n}$$

分母が $(x^2+ax+b)^n$ の場合は変数変換で $(x^2+a^2)^n$ と仮定してよい。分子を $(x+a)$ または (x^2+a^2) で展開することにより，$\dfrac{f_1(x)}{(x+a)^n} = \dfrac{a_1}{x+a} + \cdots + \dfrac{a_n}{(x+a)^n}$，$\dfrac{f_2(x)}{(x^2+a^2)^n} = \dfrac{b_1x+c_1}{x^2+a^2} + \cdots + \dfrac{b_nx+c_n}{(x^2+a^2)^n}$ とできる。以上により次の 3 つの積分ができればよい事が分かる。

$$\int \frac{1}{(x+a)^n} dx, \qquad \int \frac{x}{(x^2+a^2)^n} dx, \qquad \int \frac{1}{(x^2+a^2)^n} dx$$

1 番目は $u = x+a$, 2 番目は $u = x^2+a^2$ と置けばすぐできる。3 番目の積分を直接与えるのは難しいが次の漸化式により計算することができる。

$J_n = \displaystyle\int \frac{1}{(x^2+a^2)^n} dx$ とおくと，漸化式

$$J_{n+1} = \frac{1}{2na^2}\left\{\frac{x}{(x^2+a^2)^n} + (2n-1)J_n\right\}$$

が成立するので，この式により順次計算する事ができる。

演習問題 3.3　次の関数の不定積分を求めよ。

(1) $\dfrac{1}{x(x-1)}$　(2) $\dfrac{x^2+1}{x(x-1)^2}$　(3) $\dfrac{x^3}{(x+1)^2}$

(4) $\dfrac{1}{x(x^4-1)}$　(5) $\dfrac{1}{(x^2+1)^2}$　(6) $\dfrac{x-1}{x^2+2x+2}$

(7) $\dfrac{1}{x^3+1}$　(8) $\dfrac{1}{x^4+1}$

$\boxed{2}$ 3 角関数の有理関数

$\displaystyle\int R(\sin x, \cos x)dx$ の形の積分，ただしここで $R(s,t)$ は s と t の有理関数。

$t = \tan(x/2)$ とおくと，$dx = \dfrac{2}{1+t^2}dt$,$\sin x = \dfrac{2t}{1+t^2}$, $\cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$ なので,

$$\int R(\sin x, \cos x) = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2}{1+t^2}dt$$

となり有理関数の積分に帰着できる。これは万能であるが最善の方法とは限らない。例えば，$\tan x$ で表される時は $t = \tan x$ と置く方が一般に簡単になる。

$I = \displaystyle\int \frac{1}{\sin x}dx$ は $t = \tan\left(\dfrac{x}{2}\right)$ と置くと，

$$I = \int \frac{1+t^2}{2t}\frac{2}{1+t^2}dt = \int \frac{1}{t}dt = \log|t| = \log\left|\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right|$$

となる。

$I = \displaystyle\int (\tan x)^2 dx$ の場合 $t = \tan\left(\dfrac{x}{2}\right)$ と置いても出来るが，計算は少し面倒である。このとき $t = \tan x$ と置くと，$\dfrac{dt}{dx} = \dfrac{1}{(\cos x)^2} = 1 + (\tan x)^2 = 1 + t^2$ なので

$$I = \int t^2 \frac{1}{1+t^2}dt = \int \frac{1+t^2-1}{1+t^2} = \int dt - \int \frac{1}{1+t^2}dt = t - \arctan t = tanx - x$$

となる。

演習問題 3.4　次の関数の不定積分を求めよ。

(1) $\sin x \cos x$　(2) $\sin^3 x$　(3) $\dfrac{1}{\cos x}$

(4) $\dfrac{1}{\tan x}$　(5) $\dfrac{1}{1+\sin x}$　(6) $\dfrac{1}{\sin x - \cos x}$

$\boxed{3}$ ルートの中の 2 次式 (1)—3 角関数

$\displaystyle\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx$ の形の積分，ただし，ここで $R(s,t)$ は s と t の有理関数。2 通りの方法で計算をする。最初は 3 角関数を用いて変換するものを紹介し，次に無理式を用いるものを紹介する。3 角関数を用いる変換の場合 2 次式はあらかじめ $a^2-x^2, x^2+a^2, x^2-a^2$ のいずれかの形に変形されているものとする。

(1) $\displaystyle\int R\left(x, \sqrt{a^2-x^2}\right)dx$

$x = a\sin t$ と置くと，

$$\int R\left(x, \sqrt{a^2 - x^2}\right) dx = \int R\left(a\sin t, a\cos t\right) a\cos t dt$$

(2) $\displaystyle\int R\left(x, \sqrt{x^2 + a^2}\right) dx$

$x = a\tan t$ と置くと，

$$\int R\left(x, \sqrt{x^2 + a^2}\right) dx = \int R\left(a\tan t, \frac{a}{\cos t}\right) \frac{a}{\cos^2 t} dt$$

(3) $\displaystyle\int R\left(x, \sqrt{x^2 - a^2}\right) dx$

$x = \dfrac{a}{\sin t}$ と置くと，

$$\int R\left(x, \sqrt{x^2 - a^2}\right) dx = -\int R\left(\frac{a}{\sin t}, \frac{a\cos t}{\sin t}\right) \frac{a\cos t}{\sin^2 t} dt$$

いずれの場合も 3 角関数の有理関数に帰着できる。

演習問題 3.5　次の関数の不定積分を求めよ。

(1) $\dfrac{1}{\sqrt{2 - 3x^2}}$　(2) $\dfrac{1}{\sqrt{3 + 2x - x^2}}$　(3) $\dfrac{1}{x\sqrt{3x^2 - 2}}$

(4) $\dfrac{1}{x^2 + x + 1}$　(5) $\sqrt{a^2 - x^2}$　$(a > 0)$

$\boxed{4}$ ルートの中の 2 次式 (2)—無理関数

無理式を用いてルートの中に 2 次式がある場合の積分 $\displaystyle\int R\left(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}\right) dx$ を求める。

(1) $a > 0$ の場合

$\sqrt{ax^2 + bx + c} = t - \sqrt{a}x$ と置くと，$x = \dfrac{t^2 - c}{2\sqrt{a}t + b}$, $dx = \dfrac{2\sqrt{a}t^2 + 2bt + 2\sqrt{a}c}{(2\sqrt{a}t + b)^2}dt$, $t - \sqrt{a}x = \dfrac{\sqrt{a}t^2 + bt + c}{2\sqrt{a}t + b}$ となるので

$$\int R\left(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}\right) dx = \int R\left(\frac{t^2 - c}{2\sqrt{a}t + b}, \frac{\sqrt{a}t^2 + bt + c}{2\sqrt{a}t + b}\right) \frac{2\sqrt{a}t^2 + 2bt + 2\sqrt{a}c}{(2\sqrt{a}t + b)^2} dt$$

(2) $ax^2 + bx + c = 0$ が 2 解 $\alpha, \beta(\alpha < \beta)$ を持つ時。$a > 0$ の場合もできるがここでは $a < 0$ とする。$ax^2 + bx + c = a(x - \alpha)(x - \beta)$ となる。$t = \sqrt{\dfrac{a(x - \beta)}{x - \alpha}}$ または同じことだが $\sqrt{ax^2 + bx + c} = t(x - \alpha)$ と置くと，$x = \dfrac{\alpha t^2 - a\beta}{t^2 - a}$, $x - \alpha = \dfrac{a(\alpha - \beta)}{t^2 - a}$, $\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{2a(\beta - \alpha)t}{(t^2 - a)^2}$ より，

$$\int R\left(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}\right) dx = \int R\left(\frac{\alpha t^2 - a\beta}{t^2 - a}, \frac{a(\alpha - \beta)t}{t^2 - a}\right) \frac{2a(\beta - \alpha)t}{(t^2 - a)^2} dt$$

を得る。

演習問題 3.6　次の関数の不定積分を求めよ。

(1) $\dfrac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$　(2) $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}$　(3) $\sqrt{x^2+a}$
(4) $x^2\sqrt{a^2-x^2}$

方法の違いで結果が一見違うように見える時もある。例えば，$I=\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}dx$ を考える。3角関数で置換すると，

$$I=I_1=-\arcsin\frac{1}{x}$$

となるが，無理式を用いると，

$$I=I_2=2\arctan(x+\sqrt{x^2-1})$$

となる。見かけは違うが，実は $I_2=\pi+I_1$ となっている。

演習問題 3.7　今までは学んだ事に対応する演習問題で，演習問題の場所によってどの方法を使うかというのは明らかであった。最後に色々なタイプを混ぜて演習問題とする。積分計算の手法を身につけるのが目的なのですべてを解く必要はない。また中には難問もある。嗅覚を働かせてそれを避ける練習にもなるかもしれない。

次の関数の不定積分を求めよ。

(1) $\dfrac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}$　(2) $\cos^2 x-\sin^2 x$　(3) $\dfrac{x}{(1+x^2)^{3/2}}$
(4) $x\arcsin x$　(5) $\dfrac{\cos 2x}{e^{3x}}$　(6) xe^{-x}
(7) $x\cos x$　(8) $x^2\sin x$　(9) e^{3x+1}
(10) $2x\arctan x$　(11) $\log(2x+1)$　(12) $\dfrac{1}{x(\log x)^n}$
(13) $x^2\log x$　(14) xe^{2x^2+3}　(15) $\dfrac{e^x}{x}+e^x\log x$
(16) $\arcsin\sqrt{\dfrac{x}{x+1}}$　(17) $(2x+1)\sin(x^2+x+1)$　(18) $\cos^n x\sin x$
(19) $(ax^2+bx+c)e^x$　(20) $\dfrac{\arcsin x}{(1-x^2)^{3/2}}$　(21) $\dfrac{x\arcsin x}{(1+x^2)^2}$
(22) $\sin(\log x)$　(23) x^3e^x　(24) x^4e^x
(25) $\dfrac{1}{x^4+x^2+1}$　(26) $\dfrac{1}{1+x^2}$　(27) $\dfrac{1}{(1+x)^2(x^2+1)}$
(28) $\dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}}$　(29) $\dfrac{1}{\cos^8 x}$　(30) $\dfrac{1}{\sin x\cos^5 x}$
(31) $\dfrac{1+\sin x}{\sin x(1+\cos x)}$　(32) $\dfrac{x}{\sqrt{a-x}}$　(33) $\dfrac{(a+bx^3)^{3/2}}{x}$
(34) $\dfrac{1}{3+\cos x}$　(35) $\dfrac{\sin x}{1+\sin x+\cos x}$　(36) $\dfrac{1}{(e^x+e^{-x})^4}$
(37) $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$　(38) $\sqrt{x^2-1}$　(39) $\dfrac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}$
(40) $\dfrac{1}{x^2\sqrt{1+x^2}}$　(41) $\dfrac{1-x^2}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}$　(42) $\dfrac{1}{(x+1)\sqrt{x^2+2x-1}}$
(43) $\dfrac{1}{1+x\sqrt{1+x^2}}$　(44) $\sqrt{x+\sqrt{x^2+2}}$　(45) $\dfrac{1-2x}{(3-2x)\sqrt{1-x^2}}$

(46) $\dfrac{1}{(4-3x^2)\sqrt{3+4x^2}}$

(47) $\dfrac{1}{x^4\sqrt{a^2+x^2}}$

(48) $\dfrac{1}{x\sqrt{1+x^6}}$

(49) $\dfrac{1}{4+x^2}$

(50) $\dfrac{1}{1+\sqrt[3]{x+1}}$

(51) $\dfrac{x(x^2+3)}{(x^2-1)(x^2+1)^2}$

(52) $3x^2e^{x^3+1}$

(53) $\dfrac{1}{x^3(x+1)}$

(54) $\dfrac{2x^2+x+4}{x(x^2+2)^2}$

(55) $\dfrac{x^4-x^3-3x^2-x}{(x^2+1)^3}$

(56) $\dfrac{x^4-x^3+2x+1}{x^4-x^3-x+1}$

(57) $\dfrac{3}{x^3-1}$

(58) $\dfrac{1}{e^x+4e^{-x}+3}$

(59) $\dfrac{\sin^2 x}{1+3\cos^2 x}$

(60) $\dfrac{1}{e^x+e^{-x}}$

(61) $\dfrac{\sin x\cos x}{\sin^4 x+\cos^4 x}$

(62) $\dfrac{1}{a\sin^2 x+b\cos^2 x}$

(63) $\dfrac{1}{a\cos x+b\sin x}$

(64) $\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$

(65) $\dfrac{\sqrt{x}}{1+x}$

(66) $\dfrac{1}{2-\tan^2 x}$

(67) $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+4}}$

(68) $\dfrac{\cos x}{\sin^n x}$

(69) $\dfrac{1}{(2+x)\sqrt{1-x^2}}$

(70) $\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

(71) $\dfrac{\log(\log x)}{x}$

(72) $\dfrac{x^2}{\sqrt[3]{a^3+x^3}}$

(73) $\dfrac{1}{(1+x)\sqrt{1-x}}$

(74) $\dfrac{\sqrt{x-1}}{x\sqrt{x+1}}$

(75) $\dfrac{12}{x^3-8}$

(76) $\dfrac{\sin x}{1+\sin x}$

(77) $\dfrac{1}{a+b\sin x}$

(78) $\sin 4x$

(79) $\dfrac{1}{\cos x(5+3\cos x)}$

(80) $\dfrac{x^2}{1+x^2}\arctan x$

(81) $\dfrac{\sin x}{3+\tan^2 x}$

(82) $\log(1+\sqrt{x})$

(83) $\dfrac{1+\sqrt{1+x}}{1-\sqrt{x}}$

(84) $\dfrac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}}$

(85) $3x^2(x^3+5)^6$

(86) $\dfrac{1}{(x+2)\sqrt{2+x-x^2}}$

(87) $\dfrac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}$

(88) $e^{ax}\cos bx$

(89) $e^{ax}\sin bx$