解析学 I 要綱 #10　　　　2007–2–1　　河野

4 微分方程式

4.1 微分方程式とは

現象 ⟶ モデル化 ⟶ 微分方程式を立てる ⟶ 微分方程式を解く ⟶ 現象を理解する

上は微分方程式を用いた現象の解析を図式にしたものである。この方法は発見以来 350 年ほどたつが，その威力は依然として大きい。ある意味で最も強力な解析手段と言える。図式では「解く」と書いてあるが「解けない」場合は数値計算等を行うことも含めて考えている。

以前は高校の数学 III で微分方程式を扱っていたが，現在の課程からはなくなっている。物理学等ですでに扱っているとは思うが,「微分方程式はどんなものか」という説明から始める。最初は例から。

質量 m の物体 (質点と考える) が x 軸上を運動している。時刻 t における質点の x 座標を $x = x(t)$ とする。物体には原点からの距離に比例する原点向きの力 $F = -kx$ が働いているとする (たとえばバネに結び付けられた物体の運動)。ニュートンの運動方程式 $F = m\alpha$ (α は加速度) より x は

$$-kx = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

を満たす。この様にある関数とその導関数及び高次導関数の間に成立する式を**微分方程式**という。

この微分方程式を満たす関数 (微分方程式の解と呼ばれる) は，すべて $x = C_1\cos\omega t + C_2\sin\omega t$ (ただし $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$ とする) という形をしている事が分かる (この事は後で導く)。即ち単振動をすることが分かる。このような解は**一般解**と呼ばれる。「微分方程式を解く」とは微分方程式の一般解を求めることである。$t = 0$ のとき原点にあり，そのときの速度が v_0 である様な解を考える。その解は $x(0) = 0, \dfrac{dx}{dt}(0) = v_0$ を満たすので，$x = v_0\sin\omega t$ である事が分かる。この様に (**初期条件**と呼ばれる) 或る種の条件を付加する事により得られる解を**特殊解**と呼ぶ。

一般的に微分方程式を一応定義しておこう。前の例は独立変数が t, 従属変数が x であったが，ここでは独立変数 x, 従属変数 y としよう(1)。n を自然数とする。n+2 変数関数 $F(x, Y_0, Y_1, \ldots, Y_n)$(2)が与えられているとする。このとき

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0 \qquad (*)$$

を n 階の**微分方程式** (*differential equation*) と呼び，関数 y で $(*)$ を満たすものを微分方程式の**解** (*solution*) という。すべての解を含む，一般に任意定数を n 個含む解を**一般解** (*general solution*)

このプリントも含め講義関連のプリントは http://math.cs.kitami-it.ac.jp/˜kouno/kougi.html においてある。

(1)独立変数が 2 つ以上ある多変数関数に関する微分方程式 (**偏微分方程式**と呼ばれる) もあるが，ここでは扱わない。偏微分方程式も扱う立場では，我々が微分方程式と呼んでいるものを**常微分方程式**と呼ぶ。

(2)F が Y_n に依存しないとき，即ち Y_n が変化しても F が変化しない場合を除く。

といい，任意定数を含まない解を**特殊解** (*particular solution*) という。「微分方程式を解く」とは与えられた微分方程式の一般解を求める事をいう。

最初の例は (独立変数を t とする)，$F(t, X_0, X_1, X_2) = mX_2 + kX_0$ とおけばよい。

与えられた条件から微分方程式を導出することを考えよう。このことを「微分方程式を立てる」という。実際の研究においては微分方程式を解く事よりも，微分方程式を立てる事の方が大事な場合が多い。微分方程式を解く方法は (解けるものは) 色々研究されていて，多くの本に記載されている。しかし自分が研究対象に選んだ事象がどの様な微分方程式を満たすかは，その研究をしているもの自身が見つける必要がある。

例を考える。平面内に曲線 $y = f(x)$ がある。この曲線は曲線上の任意の点における法線 (接線と直交する曲線) が原点を通るとする。このとき曲線が満たすべき微分方程式を立てよう。曲線上の点の座標をを (x, y) とする。この点における接線の傾きは $y' = \dfrac{dy}{dx}$ である。法線は接線と直交するので傾きは $-\dfrac{1}{y'}$ である。法線上の点の座標を (X, Y) とすると法線の方程式は

$$Y = -\frac{1}{y'}(X - x) + y$$

となる。この直線は原点 $(0, 0)$ を通るので $0 = -\dfrac{1}{y'}(0 - x) + y$, 即ち

$$yy' + x = 0$$

を得る。次節で後でこの微分方程式を解く。

演習問題 4.1　次の条件の下で微分方程式を立てよ。

(1) 曲線 $y = f(x)$ 上の点を P とする。P における法線が x 軸と交わる点を N，P から x 軸へ下ろした垂線の足を Q とすると線分 QN の長さが常に一定である。

(2) 曲線 $y = f(x)$ 上の点を P とする。P における接線が x 軸と交わる点を S，y 軸と交わる点を T とすると点 P は線分 ST の中点である。

(3) 空気中を落下する物体に働く空気の抵抗は速度の 2 乗に比例する。比例定数を k，重力定数を g とする。速度を v とするとき v が満たすべき微分方程式を求めよ。

4.2 変数分離型

最も簡単な微分方程式は $\dfrac{dy}{dx} = f(x)$ であろう。これは $f(x)$ の不定積分が求まれば，$y = \displaystyle\int f(x)dx$ と求まる。

次に簡単なタイプが $\dfrac{dy}{dx} = \lambda y$ (λ は定数) であろう。これに関しては次が成立する。

命題 4.1 微分方程式 $\dfrac{dy}{dx} = \lambda y$ の一般解は $y = Ce^{\lambda x}$ である。

証明　恒等的に 0 となる写像 $y \equiv 0$ は解になっている。よって $y \not\equiv 0$ とする。ある点 x で 0 ではないの y で両辺を割ると $\dfrac{1}{y}\dfrac{dy}{dx} = \lambda$ が得られる。両辺を x で積分すると

$$\int \frac{1}{y}dy = \int \frac{1}{y}\frac{dy}{dx}dx = \int \lambda dx$$

となる。$\displaystyle\int \frac{1}{y}dy = \log|y|$, $\displaystyle\int \lambda dx = \lambda x + C_1$ なので，$|y| = e^{\lambda x + C_1} = e^{C_1}e^{\lambda x}$ を得る。よって $C = \pm e^{C_1}$ とおくと，$y = Ce^{\lambda x}$ となる。この式は最初の $y \equiv 0$ の場合も含んでいるので，一般解が得られた。∎

dx, dy を独立なものと扱って $\dfrac{dy}{dx} = \lambda y$ より $\dfrac{1}{y}dy = \lambda dx$ のような計算を行う場合がある。命題 4.1 の証明中の式でいうと $\displaystyle\int \frac{1}{y}dy = \int \lambda dx$ 等書かれる。数学的に厳密でないように見えるが，これをきちんとした数学的枠組みで議論する方法も知られている。

命題 4.1 の証明方法を一般化すると，微分方程式の解を求める方法として**変数分離型**と呼ばれるものが得られる。

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y)$$

の形の微分方程式を変数分離型の微分方程式と呼ぶ。$\dfrac{1}{g(y)}dy = f(x)dx$ と変形すると，

$$\int \frac{1}{g(y)}dy = \int f(x)dx$$

が得られる。この積分が計算できれば y を含む式が得られ，y について解ければ解が得られる。

例えば $\dfrac{dy}{dx} = 2xy$ を考える。$\dfrac{1}{y}dy = 2xdx$ より $\displaystyle\int \frac{1}{y}dy = \int 2xdx$, $\log|y| = x^2 + C_1$ となり，$y = Ce^{x^2} = C\exp\left(x^2\right)$[(1)]を得る。

演習問題 4.2　次の微分方程式を解け。

(1) $yy' + x = 0$
(2) 演習問題 4.1 (1) で得られた微分方程式
(3) 演習問題 4.1 (2) で得られた微分方程式
(4) 演習問題 4.1 (3) で得られた微分方程式

今まで微分方程式に対して解は存在する事を前提にした議論をしてきた。しかし，微分方程式が与えられた時，その解はいつでも存在するのだろうか。偏微分方程式も含めるとそれは正しくない事が知られている。次の定理は (常) 微分方程式の解の存在と一意性を保証するものである。証明抜きで紹介しておく。微分方程式が $\dfrac{d^n y}{dx^n} = f(x, y, y' \ldots, y^{(n-1)})$ の形をしているとき**正規型**という。

定理 4.2 [**微分方程式の解の存在と一意性**] $f(x, Y_0, Y_1, \ldots, Y_{n-1})$ はある領域 R で C^1 級 (導関数が連続) とする。R 内の点 $(a_0, b_0, b_1, \ldots, b_{n-1})$ を 1 つ指定する。このとき微分方程式

$$\frac{d^n y}{dx^n} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$$

の解で $y(a_0) = b_0, y'(a_0) = b_1, \ldots, y^{(n-1)}(a_0) = b_{n-1}$ を満たすものが唯 1 つ存在する。

---

(1) $\exp(f(x)) = e^{f(x)}$ である。$f(x)$ が複雑な式の場合，指数の肩に複雑な式があるのは見にくいので，この様な表記を用いることがある。

4.3 演算子法

微分するという操作を演算子と考え微分方程式を解く方法を紹介しよう。この節では特に断らなければ独立変数は x とする。

関数 y に対しその導関数 y' を対応させる写像を D と書く。独立変数を明示的に表したいときは D_x と書く。$D(y)=y'$ だから例えば命題 4.1 の微分方程式は $D(y)=ky$ と書ける。

定数 λ を定数倍するという演算子と見る。即ち λ を，y に対し λy を対応させる (関数を λ 倍するという) 演算子と考える。同様に関数 $p(x)$ を関数倍する (y に対し $p(x)y$ を対応させる) 演算子と見る事ができる。

演算子 E, F があるとき演算子の和 $E+F$ を $(E+F)(y)=E(y)+F(y)$ で定義する。積 DE を $(FE)(y)=F(E(y))$ で定義する。一般には $FE\neq EF$ である。例えば $E=D$,$F=p(x)$(関数倍) とすると $FE(y)=p(x)y'$ だが，$EF(y)=E(p(x)y)=p'(x)y+p(x)y'$，即ち $EF-FE=p'(x)$ となり，$p'(x)\neq 0$ のときは $EF\neq FE$ である。$EF\neq FE$ 除くと加法の交換法則，分配法則等は実数の和・積と同じ様に計算できる。

命題 4.1 の微分方程式は $D(y)=\lambda y$ であったが，$D(y)-\lambda y=0$ と変形し，$D-\lambda$ を演算子と考えると $(D-\lambda)y=0$ という式が得られる。

命題 4.3 $D-\lambda=e^{\lambda x}De^{-\lambda x}$ が成立する。更に $P(x)=\displaystyle\int p(x)dx$ とすると $D-p(x)=e^{P(x)}De^{-P(x)}$ が成立する。

証明 式が意味している事は任意の[1]関数 y に対し $(D-\lambda)y=(e^{\lambda x}De^{-\lambda x})y$ が成立する事である。

$(De^{-\lambda x})y=D(e^{-\lambda x}y)$ であり，積の微分法より

$$\begin{aligned} D(e^{-\lambda x}y) &= D(e^{-\lambda x})y+e^{-\lambda x}D(y) \\ &= -\lambda e^{-\lambda x}y+e^{-\lambda x}D(y) \\ &= e^{-\lambda x}\{D(y)-\lambda y\} \\ &= e^{-\lambda x}(D-\lambda)y \end{aligned}$$

となる。両辺に $e^{\lambda x}$ を掛けると

$$(D-\lambda)y=e^{\lambda x}\left\{D(e^{-\lambda x}y)\right\}=e^{\lambda x}\left\{(De^{-\lambda x})y\right\}=\left(e^{\lambda x}De^{-\lambda x}\right)y$$

となり証明が終わる。後半の証明は $D(e^{-P(x)})=-p(x)e^{P(x)}$ である事に注意すれば

$$\begin{aligned} D(e^{-P(x)}y) &= D(e^{-P(x)})y+e^{-P(x)}D(y)=-p(x)e^{-P(x)}y+e^{-P(x)}D(y) \\ &= e^{-P(x)}\{D(y)-p(x)y\}=e^{-P(x)}\left(D-p(x)\right)y \end{aligned}$$

となるので，

$$\left(e^{P(x)}De^{-P(x)}\right)y=\left(D-p(x)\right)y$$

を得る。よって $\left(e^{P(x)}De^{-P(x)}\right)=(D-p(x))$ となる。∎

---

[1] 勿論微分可能な関数でなければ，D は作用できない。厳密には考えている範囲をきちんと定義する必要があるがここではきちんとさせないでおく。それがいやな人は，さしあたり C^∞ 関数全体を考えておけばよいだろう。

演算子法を用いて命題 4.1 の別証明を与えよう。$Du=0$ なら $u=C$(定数) である事を注意しておく。(一般に $Du=f(x)$ なら積分する事により $u=\displaystyle\int f(x)dx$ が得られる。) 与えられた微分方程式は演算子を用いて $(D-\lambda)y=0$ と書ける。命題 4.3 より $e^{\lambda x}De^{-\lambda x}y=0$ となる。$u=e^{-\lambda x}y$ とおくと $e^{\lambda x}Du=0$ となり，両辺に $e^{-\lambda x}$ を掛けると $Du=0$ を得る。よって $u=C$ となる。$C=u=e^{-\lambda x}y$ より $y=Ce^{\lambda x}$ を得る。

λ が定数でない場合でも演算子法を用いることにより次が得られる。

命題 4.4 微分方程式 $(D-p(x))\,y=0$ の一般解は $P(x)=\displaystyle\int p(x)dx$ とするとき

$$y=Ce^{P(x)}=C\exp\left(P(x)\right)=C\exp\left(\int p(x)dx\right)$$

である。

証明　命題 4.3 より $D-p(x)=e^{P(x)}De^{-P(x)}$ なので微分方程式は $\left(e^{P(x)}De^{-P(x)}\right)y=0$ と変形できる。$u=e^{-P(x)}y$ とおくと，$e^{P(x)}Du=0$ より $Du=0$ を得る。よって $u=C$(定数) とできるので，$y=ue^{P(x)}=Ce^{P(x)}$ が分かる。∎

一般に演算子 L を

$$L=a_n(x)D^n+a_{n-1}(x)D^{n-1}+\cdots+a_1(x)D+a_0(x)$$

とするとき (ただし $a_n(x)\not\equiv 0$ とする),

$$Ly=f(x)$$

の形をしている微分方程式を n 階の**線型微分方程式** (*linear differential equation*) と呼ぶ。特に係数である $a_n(x)$ がすべて定数であるとき，定数係数の線型微分方程式という。定数係数の線型微分方程式は重要なタイプの微分方程式であり，しかも他のタイプに比べ解くのが容易である。この章では線型の微分方程式について議論する。また $f(x)=0$ のとき，この微分方程式を**同次型**といい，$f(x)\neq 0$ のとき**非同次型**という。

2 階の定数係数線型微分方程式を考える。最初に同次型を考える。例として $L=D^2-\lambda^2$ (ただし $\lambda\neq 0$ とする) とするとき $L(y)=0$ すなわち

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\lambda^2y$$

を解いてみよう。

定数倍という演算子は D と交換可能，即ち $D\lambda=\lambda D$ が成立する事を注意しておこう。

$$D^2-\lambda^2=(D-\lambda)(D+\lambda)$$

が成立するので

$$L(y)=(D^2-\lambda^2)y=(D-\lambda)(D+\lambda)y=0$$

となる。$u=(D+\lambda)y$ とおくと，$(D-\lambda)u=0$ である。命題 4.3 より $D-\lambda=e^{\lambda x}De^{-\lambda x}$ なので $e^{\lambda x}De^{-\lambda x}u=0$ が成立している。$v=e^{-\lambda x}u$ とおくと，$e^{\lambda x}Dv=0$ より，両辺に $e^{-\lambda x}$ をかけると

$Dv=0$ となる。よって積分すると $v=C_1$ となる (C_1 は積分定数)。このとき $u=e^{\lambda x}v=C_1e^{\lambda x}$ となる。よって微分方程式は

$$(D+\lambda)y=C_1e^{\lambda x}$$

となる。命題 4.3 より $(D+\lambda)=e^{-\lambda x}De^{\lambda x}$ となるので

$$e^{-\lambda x}De^{\lambda x}y=C_1e^{\lambda x}$$

を得る。$z=e^{\lambda x}y$ とおくき，両辺に $e^{\lambda x}$ をかけると $Dz=C_1e^{2\lambda x}$ となる。両辺を積分する事により $z=\dfrac{C_1}{2\lambda}e^{2\lambda x}+C_2$ となる。$\dfrac{C_1}{2\lambda}$ をあらためて C_1 とおくと $z=C_1e^{2\lambda x}+C_2$，よって一般解 $y=C_1e^{\lambda x}+C_2e^{-\lambda x}$ を得る。

この例は一般化できる。演算子 $L=D^2+aD+b$ に対し，微分方程式

$$Ly=0$$

を考える。2 次方程式 $t^2+at+b=0$ が異なる 2 つの解をもつとする。この例と同じ方法で一般解を求めることができる。このことは興味のある学生に対する対する演習問題とする (演習問題 4.5)。

次の例として $L=D^2-2D+1$ とするとき

$$Ly=0$$

を考える。前の例と同じように計算すれば解が得られるが，結果の形は異なる。$L=(D-1)^2$ と書けるので，$u=(D-1)y$ とおくと，微分方程式は $(D-1)u=0$ となる。$D-1=e^xDe^{-x}$ なので

$$e^xDe^{-x}u=0$$

が成立している。$v=e^{-x}u$ とおくと $e^xDv=0$ となり，$Dv=0$ を得る。よって $v=C_1$ としてよい。このとき $u=C_1e^x$ となる。$u=(D-1)y$ なので，$(D-1)y=C_1e^x$ となるが命題 4.3 を用いると

$$e^xDe^{-x}y=C_1e^x$$

となり，両辺に e^{-x} をかけて

$$D(e^{-x}y)=C_1$$

となる。両辺を積分すると

$$e^{-x}y=C_1x+C_2$$

となるので (C_2 は積分定数) 一般解

$$y=C_1xe^x+C_2e^x$$

を得る。この例と同じ方法で一般解を求めることができる。このことは興味のある学生に対する対する演習問題とする (演習問題 4.5)。

最後の例として微分方程式

$$\left(D^2+D+1\right)y=0$$

を考える。$\lambda_1 = \dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}$，$\lambda_2 = \dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2}$ とおくと $D^2+D+1=(D-\lambda_1)(D-\lambda_2)$ と因数分解できるので，最初の例と同様に計算すれば，一般解は

$$y = C_1 \exp\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}x\right) + C_2 \exp\left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}x\right)$$

となる。$\exp\left(\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}x\right)$ は複素数値関数なので，解関数 y も複素値関数である。複素数値関数の範囲で解関数を調べている場合はこれで十分である。しかし実数値関数の解関数を必要とする場合は，オイラーの公式を用いて少し変形する必要がある。

オイラーの公式は

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

であった。これを用いると

$$\begin{aligned}
\exp\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}x\right) &= \exp\left(-\frac{1}{2}x\right)\exp\left(i\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) \\
&= \exp\left(-\frac{1}{2}x\right)\left\{\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + i\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right\}
\end{aligned}$$

と変形できる。同様に

$$\exp\left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}x\right) = \exp\left(-\frac{1}{2}x\right)\left\{\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x - i\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right\}$$

となる。よって $C_1 = \dfrac{1}{2}$，$C_2 = \dfrac{1}{2}$ は微分方程式の特殊解であり，

$$y_1 = \exp\left(-\frac{1}{2}x\right)\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x$$

となる。また $C_1 = \dfrac{1}{2i}$，$C_2 = -\dfrac{1}{2i}$ は微分方程式の特殊解であり，

$$y_2 = \exp\left(-\frac{1}{2}x\right)\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x$$

となる。2 つの解が得られたので，C_1, C_2 を実数とするとき

$$C_1y_1 + C_2y_2 = C_1\exp\left(-\frac{1}{2}x\right)\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + C_2\exp\left(-\frac{1}{2}x\right)\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x$$

は微分方程式の実数値関数の解になっている。定理 4.2 を用いると実数値関数と考えたときの一般解であることが分かる。このことは一般化することができる。興味のある学生に対する対する演習問題とする (演習問題 4.6)。

演習問題 4.3　次の微分方程式を演算子法を用いて解け。ただし解関数は複素数値関数でもよいとする。

(1) $y' + y\sin x = 0$

(2) $y' + (x+1)y = 0$

(3) $y' + e^{2x}y = 0$

(4) $y'' - 5y' + 6y = 0$

(5) $y'' - y' - 6y = 0$

(6) $y'' + y = 0$

(7) $y'' + 4y = 0$

(8) $y'' - 2y' + y = 0$

(9) $y'' + 4y' + 4y = 0$

演習問題 4.4　次の微分方程式を実数値関数の範囲で解け。

(1) $y'' + y = 0$

(2) $y'' + \omega^2 y = 0 \qquad (0 \neq \omega \in \mathbb{R})$

(3) $y'' - y' + y = 0$

(4) $y'' - 2y' + 2y = 0$

演習問題 *4.5　次が成立することを示せ。

2 次式 $\varphi(t) = t^2 + at + b$ に対し方程式 $\varphi(t) = 0$ は解 α, β を持つとする。微分方程式

$$\left(D^2 + aD + b\right) y = 0$$

を考える。この微分方程式の一般解は $\alpha \neq \beta$ のとき

$$y = C_1 e^{\alpha x} + C_2 e^{\beta x}$$

であり，$\alpha = \beta$ のとき

$$y = C_1 x e^{\alpha x} + C_2 e^{\alpha x}$$

である。

演習問題 *4.6　次が成立することを示せ。

$\varphi(t) = t^2 + at + b = 0$ は実数解を持たないとする。$\varphi(t) = 0$ の複素解を $\lambda_1 \pm i\lambda_2$ とする。微分方程式

$$(D^2 + aD + b)y = 0$$

の実数値関数としての一般解は

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x}\cos\lambda_2 x + C_2 e^{\lambda_1 x}\sin\lambda_2 x$$

である。ここで C_1, C_2 は実数である任意定数。

次に非同次型を扱おう。同次型の場合と同様に計算を実行すれば非同次型の場合も解を求めることができる。微分方程式

$$(D^2 - 4)y = e^x$$

の解を求めよう。$D^2 - 4 = (D-2)(D+2)$ なので，$(D-2)(D+2)y = e^x$ である。$u = (D+2)y$ とおくと，u に関する微分方程式は $(D-2)u = e^x$ となる。$D - 2 = e^{2x}De^{-2x}$ なので

$$e^{2x}De^{-2x}u = e^x$$

となる。$v = e^{-2x}u$ とおくと，v に関する微分方程式は

$$Dv = e^{-x}$$

となる。両辺を積分すると

$$v = -e^{-x} + C_1$$

を得る。$e^{-2x}u = -e^{-x} + C_1$ なので

$$u = e^{x} + C_1 e^{2x}$$

となる。$u = (D+2)y$ なので y に関する微分方程式は $(D+2)y = e^{x} + C_1 e^{2x}$ なので $D+2 = e^{-2x}De^{2x}$ を用いて

$$e^{-2x}De^{2x}y = e^{x} + C_1 e^{2x}$$

と書ける。$w = e^{2x}y$ とおくと，w に関する微分方程式は

$$Dw = e^{3x} + C_1 e^{4x}$$

となる。両辺を積分して

$$w = \frac{1}{3}e^{3x} + \frac{C_1}{4}e^{4x} + C_2$$

を得る。$\dfrac{C_1}{4}$ を C_1 におき直すと，

$$y = \frac{1}{3}e^{x} + C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x}$$

を得る。

演習問題 4.7　次の微分方程式を解け。

(1) $\dfrac{dy}{dx} - 3y = e^{2x}$

(2) $\dfrac{dy}{dx} + 2y = \sin x$

(3) $\dfrac{dy}{dx} + 3y = x^2 + x$

(4) $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 2\dfrac{dy}{dx} - 3y = x + 4$

(5) $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 2\dfrac{dy}{dx} - 3y = \sin x$

(6) $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 2\dfrac{dy}{dx} - 3y = e^{2x}$