解析学 I 問題解説 #3

河野

間違いがないように注意はしていますが，間違いを見つけた人は教えてください。解説の仕方が不十分で理解しづらい等の意見があればお寄せ下さい。できれば具体的に指摘していただいた方がありがたいです。改良できる範囲で改良して行きます。

演習問題 1.1　次の関数 $f(x)$ は連続かどうか調べよ。

(1) $y = f(x) = x^2 + ax + b$

(2) $y = f(x) = \dfrac{1}{x}$

(3) $(*)$[1] $y = f(x) = \begin{cases} 0 & (x \text{ が無理数または } 0) \\ \dfrac{1}{q} & (x \text{ が } 0 \text{ 以外の有理数で } x = p/q \text{ のとき，ただし } p \text{ と } q \text{ は互いに素な整数で } q > 0) \end{cases}$

(1)　任意の実数 a に対し $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ が成立するので連続である。

(2)　講義中にも言ったように，この問題は関数の定義域をどう考えるのかにより結果が変わります。$D = \mathbb{R} - \{0\}$ とするとき，$a \in D$ となる a に関して $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ が成立します。よって関数の定義域を D と考えた場合関数は連続になります。しかし定義域を $\mathbb{R}$ と考えた場合 $a = 0$ では関数は定義されていないので連続ではありません。

(3)　この問題は極限の厳密な定義に基づかなければできません。(3) の様な議論は全員が理解すべきという想定はしていません。興味のある人は ε–δ 論法に基づく議論の雰囲気を味わってみて下さい。

最初に結論を書いておく。f は

(1) 0 **で連続**
(2) 0 **以外の有理数で不連続**
(3) **無理数で連続**

である。

(1)：(1) の証明は ε–δ を直接用いなくてもできる。$f(x)$ は x が無理数のときは $f(x) = 0$, $x = 0$ のときは $f(x) = 0$, x が 0 以外の有理数のときは $x = \dfrac{p}{q}$ $(p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}, p, q$ は互いに素即ち最大公約数が 1) とするとき $f(x) = \dfrac{1}{q}$ であったので，$|f(x)| \leqq |x|$ が成立している。即ち $-|x| \leqq f(x) \leqq |x|$ が成立している。$x \to 0$ のとき $|x| \to 0$ かつ $-|x| \to 0$ なので, はさみうちの定理より $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$ が分かる。よって f は $x = 0$ で連続である。

(2)：a は 0 以外の有理数とする。ここでの証明には次の事実を用いる。

　有理数の幾らでも近くに無理数が存在する。

[1] $(*)$ 印をつけた演習問題は全員に解く事を要求はしない。興味のある者は試みる事を期待する問題である。以後その様問題には $(*)$ 印をつける。

これは正確に書くと次の様になる。

> 任意の正数 δ に対しある無理数 α で $|\alpha - a| < \delta$ を満たすものが存在する。

この証明は最後に述べるとして，ここではそれを仮定して議論を進める。「f が a で連続」をきちんと書くと

> 任意の正数 ε に対し，ある正数 δ が存在して，任意の x に対し，$|x - a| < \delta$ ならば $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ が成立する。

であった。連続でないはこの否定だから

> ある正数 ε が存在して，任意の正数 δ に対し，ある x が存在して，$|x - a| < \delta$ かつ $|f(x) - f(a)| \geqq \varepsilon$ が成立する。

という事実を証明すればよい。

a は有理数なので，$a = \dfrac{p}{q}$ $(p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}, p, q$ は互いに素$)$ とする。このとき $f(a) = \dfrac{1}{q}$ である。$\varepsilon = \dfrac{1}{q}$ とおく。任意の正数 δ に対し前に述べたことから，無理数 x で $|x-a| < \delta$ となるものが存在する。このとき $f(x) = 0$ なので，$|f(x) - f(a)| = |0 - \dfrac{1}{q}| = \dfrac{1}{q} \geqq \varepsilon$ となり，f が a で不連続である事が示される。

(3)：a を無理数とする。各自然数 n に対し $\alpha_n = \min\left\{ \left| \dfrac{i}{n} - a \right| \,\middle|\, i \in \mathbb{Z} \right\}$ とおくと，$\alpha_n \leqq \dfrac{1}{n}$ が成立している。また $\beta_n = \min\{\alpha_m \mid m = 1, 2, \ldots, n\}$ とおく。任意の正数 ε に対し $\dfrac{1}{n} < \varepsilon$ となる自然数 n が存在するので，1 つ固定する。このとき $\delta = \beta_n$ とする。任意の x に対し，x が無理数のときは $f(x) = 0$ なので $|f(x) - f(a)| = |0 - 0| = 0 < \varepsilon$ となり成立している。x が有理数のときは $x = \dfrac{p}{q}$ $(p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}, p, q$ は互いに素$)$ とする。x は $|x - a| < \delta (= \beta_n)$ を満たしているとする。$q \leqq n$ と仮定すると $|x - a| \geqq \alpha_q \geqq \beta_n = \delta$ となり矛盾するので，$q > n$ となっている。このとき $|f(x) - f(a)| = \left| \dfrac{1}{q} - 0 \right| = \dfrac{1}{q} < \dfrac{1}{n} < \varepsilon$ となり証明が終る。

残しておいた

> 任意の正数 δ に対しある無理数 α で $|\alpha - a| < \delta$ を満たすものが存在する。

を証明しよう。次の事実を実数の**アルキメデス性**という。

> 任意の正数 α, β に対し，ある自然数 n が存在して，$\alpha n > \beta$ となる。

この性質は実数の連続性より従うが，ここでは成立を仮定しておこう (「塵も積もれば山となる」原理)。δ を任意の正数とする。$\sqrt{2}$ と δ に上のアルキメデス性を適用すると，ある自然数 n で $\sqrt{2} < n\delta$ となるものが存在する。$\left\{ \sqrt{2}\dfrac{i}{n} \,\middle|\, i \in \mathbb{Z} \right\}$ という集合を考える。この集合にアルキメデス性を適用する事によりある整数 k が存在して $\sqrt{2}\dfrac{k-1}{n} < a < \sqrt{2}\dfrac{k}{n}$ となる。このとき $\alpha = \sqrt{2}\dfrac{k}{n}$ とおくと α は無理数であり $|\alpha - a| < \left| \alpha - \sqrt{2}\dfrac{k-1}{n} \right| = \left| \sqrt{2}\dfrac{k}{n} - \sqrt{2}\dfrac{k-1}{n} \right| = \sqrt{2}\dfrac{1}{n} < \delta$ となり証明が終る。

演習問題 1.2　テキストを参考にして，定理 1.13, 1.14, 1.15 を証明せよ。

定理 1.13 の証明：

(1)

$$
\begin{aligned}
(f+g)'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{(f+g)(x+h)-(f+g)(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)+g(x+h)-f(x)-g(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)+g(x+h)-g(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\left\{\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right\} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h} \\
&= f'(x)+g'(x)=(f'+g')(x)
\end{aligned}
$$

(2)

$$
\begin{aligned}
(af)'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{(af)(x+h)-(af)(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{af(x+h)-af(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}a\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\
&= a\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\
&= af'(x)=(af')(x)
\end{aligned}
$$

(3)　$f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x)=f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x+h)+f(x)g(x+h)-f(x)g(x)$ と変形すると

$$
\begin{aligned}
(fg)'(x) &= (f(x)g(x))' \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x+h)+f(x)g(x+h)-f(x)g(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\left\{\frac{f(x+h)-f(x)}{h}g(x+h)+f(x)\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right\} \\
&= \lim_{h\to 0}\left\{\frac{f(x+h)-f(x)}{h}g(x+h)\right\}+\lim_{h\to 0}\left\{f(x)\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right\} \\
&= \lim_{h\to 0}\left\{\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right\}\lim_{h\to 0}g(x+h)+f(x)\lim_{h\to 0}\left\{\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right\} \\
&= f'(x)g(x)+f(x)g'(x)=(f'g+fg')(x)
\end{aligned}
$$

(4) $k = \dfrac{f}{g}$ とおくと $f = gk$ なので，両辺を微分すると $f' = g'k + gk'$ となる。よって

$$k' = \frac{f' - g'k}{g} = \frac{f' - g'\dfrac{f}{g}}{g} = \frac{f'g - g'f}{g^2}$$

を得る。

(4) の解説は不十分点を含んでいる。それを指摘するのを意欲あるものに対する追加の演習問題とする。

定理 1.14 の証明： $k = f(x+h) - f(x)$ とおくと，$h \to 0$ のとき $k \to 0$ となる。

$$\begin{aligned}
\frac{dz}{dx} &= \lim_{h\to 0} \frac{g \circ f(x+h) - g \circ f(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \left\{ \frac{g(f(x+h)) - g(f(x))}{k} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right\} \\
&= \lim_{k\to 0} \left\{ \frac{g(f(x)+k) - g(f(x))}{k} \right\} \lim_{h\to 0} \left\{ \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right\} \\
&= \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx}
\end{aligned}$$

となる。

この証明には 1 つ不十分な点がある。それを指摘して証明を完成させるのを意欲のあるものに対する追加の演習問題とする。

定理 1.15 の証明： 定理 1.12 より f には逆関数 g が存在する。$y = f(x)$ とすると，$x = g(y)$ なので f と g の合成関数 $z = g \circ f$ は $z = x$ なので $\dfrac{dz}{dx} = 1$ である。定理 1.14 より $\dfrac{dz}{dx} = \dfrac{dz}{dy}\dfrac{dy}{dx}$ となるが $z = x$ なので $1 = \dfrac{dx}{dy}\dfrac{dy}{dx}$ となり定理 1.15 が成立する。

この証明には 1 つ不十分な点がある。それを指摘して証明を完成させるのを意欲のあるものに対する追加の演習問題とする。

演習問題 1.3 任意の自然数 n に対して $(x^n)' = nx^{n-1}$ が成立する事を示せ。

数学的帰納法で証明しよう。

(1) $n = 1$ **のとき：** $y = f(x) = x$ とすると

$$y' = \lim_{h\to 0} \frac{x + h - x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h}{h} = \lim_{h\to 0} 1 = 1$$

となる。$x^0 = 1$ と考えると，$n = 1$ のとき成立している。

(2) $n = k$ **のとき成立を仮定：** 積の微分法 (定理 1.13(3)) より

$$(x^{k+1})' = (x \cdot x^k)' = x'x^k + x(x^k)'$$

となる。帰納法の仮定より $(x^k)' = kx^{k-1}$ となるので $(x^{k+1})' = 1(x^k) + x(kx^{k-1}) = x^k + kx^k = (k+1)x^k = (k+1)x^{(k+1)-1}$ となり，$n = k+1$ でも成立している。よってすべての n で成立している。

演習問題 1.4　次の有理関数の導関数を求めよ。

(1) $y = \dfrac{x-1}{x+1}$　　(2) $y = \dfrac{x^2+1}{x^2-1}$　　(3) $y = \dfrac{1}{x^2+1}$

$(x^n)' = nx^{n-1}$ と商の微分法 (定理 1.13(4)) を組み合わせればできるので省略する。

演習問題 1.5　n を自然数，m を整数とする。関数 $y = x^{\frac{m}{n}}$ の導関数を求めよ。

最初に m を整数とするとき $(x^m)' = mx^{m-1}$ を示しておく。m が自然数のときは演習問題 1.3 で示した。$m = 0$ のときは $x^0 = 1$ と考えると $(x^0)' = 1' = 0 = 0x^{-1}$ で成立している。m が負の整数のときは $m = -n$ とおき，n に関する数学的帰納法で示す。

(1)　$n = 1$ のとき：　商の微分法より $(x^{-1})' = \left(\dfrac{1}{x}\right)' = -\dfrac{1}{x^2} = -x^{-2} = (-1)x^{-1-1}$ となり成立している。

(2)　$n = k$ のとき成立を仮定：　帰納法の仮定より $(x^{-k})' = (-k)x^{-k-1}$ が成立している。$(x^{-(k+1)})' = (x^{-k}x^{-1})' = (x^{-k})'x^{-1} + x^{-k}(x^{-1})' = -kx^{-k-1}x^{-1} - x^{-k}x^{-2} = -kx^{-k-1} - x^{-k-2} = -(k+1)x^{-k-2} = -(k+1)x^{-(k+1)-1}$ となり $n = k+1$ でも成立している。よってすべての自然数 n で成立している。

以上により $(x^m)' = mx^{m-1}$ はすべての整数で成立している。

演習問題に戻ろう。$u = x^{1/n}$ とおくと $y = u^m$ であり，$y = x^{\frac{m}{n}}$ は合成関数と見ることができる。よって $\left(x^{\frac{m}{n}}\right)' = \dfrac{dy}{du}\dfrac{du}{dx} = mu^{m-1}\dfrac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1} = \dfrac{m}{n}x^{\frac{m-1}{n}}x^{\frac{1}{n}-1} = \dfrac{m}{n}x^{\frac{m}{n}-1}$ となる。

演習問題 1.6　次の関数の導関数を定義に基づいて求めよ。ただし次の極限値は用いてよい。

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h} = 1 \qquad \lim_{h\to 0}\frac{e^h - 1}{h} = 1$$

(1) $y = x^3$　　(2) $y = \dfrac{x+1}{x^2+1}$

(3) $y = \cos 2x$　　(4) $y = \log x$

講義中にも言ったが，**定義に基づいて**とある場合は諸公式は用いてはいけない。定義のみを用いて計算する事。

(1)

$$\begin{aligned}
(x^3)' &= \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^3 - x^3}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - x^3}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{3x^2h + 3xh^2 + h^3}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\left\{3x^2 + 3xh + h^2\right\} = 3x^2
\end{aligned}$$

(2)

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{x+1}{x^2+1}\right)' &= \lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{(x+h)+1}{(x+h)^2+1}-\dfrac{x+1}{x^2+1}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{(x^2+1)\left\{(x+h)+1\right\}-(x+1)\left\{(x+h)^2+1\right\}}{h\left\{(x+h)^2+1\right\}\left\{x^2+1\right\}} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{(x^2+1)(x+1)+(x^2+1)h-(x+1)(x^2+1)-(x+1)(2xh+h^2)}{h\left\{(x+h)^2+1\right\}\left\{x^2+1\right\}} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{h\left\{x^2+1-2x^2-2x-h(x+1)\right\}}{h\left\{(x+h)^2+1\right\}\left\{x^2+1\right\}} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{x^2+1-2x^2-2x-h(x+1)}{\left\{(x+h)^2+1\right\}\left\{x^2+1\right\}} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{-x^2-2x+1}{(x^2+1)^2}
\end{aligned}
$$

(3)

$$
\begin{aligned}
(\cos 2x)' &= \lim_{h\to 0}\frac{\cos 2(x+h)-\cos 2x}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\cos 2x\cos 2h-\sin 2x\sin 2h-\cos 2x}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\cos 2x(\cos 2h-1)-\sin 2x\sin 2h}{h} \\
&= \cos 2x\lim_{h\to 0}\frac{\cos 2h-1}{h}-\sin 2x\lim_{h\to 0}\frac{\sin 2h}{h}
\end{aligned}
$$

ここで $\dfrac{\cos 2h-1}{h}=\dfrac{(\cos 2h-1)(\cos 2h+1)}{h(\cos 2h+1)}=\dfrac{\cos^2 2h-1}{h(\cos 2h+1)}=-\dfrac{\sin^2 2h}{h(\cos 2h+1)}$ なので

$$
\begin{aligned}
&= -\cos 2x\lim_{h\to 0}\frac{\sin^2 2h}{h(\cos 2h+1)}-2\sin 2x\lim_{h\to 0}\frac{\sin 2h}{2h} \\
&= -\cos 2x\lim_{h\to 0}\frac{\sin 2h}{2h}\frac{2\sin 2h}{\cos 2h+1}-2\sin 2x \\
&= -2\sin 2x
\end{aligned}
$$

となる。

(4) $k=\log(x+h)-\log x$ とおくと $h\to 0$ のとき $k\to 0$ である。また $k=\log\dfrac{x+h}{x}$ なので $\dfrac{x+h}{x}=e^k$ となり，$h=x(e^k-1)$ を得る。よって

$$
\begin{aligned}
(\log x)' &= \lim_{h\to 0}\frac{\log(x+h)-\log x}{h} \\
&= \lim_{k\to 0}\frac{k}{x(e^k-1)}=\frac{1}{x}\lim_{k\to 0}\frac{k}{e^k-1}=\frac{1}{x}
\end{aligned}
$$

となる。

演習問題 1.7　次の関数の導関数を求めよ (諸公式を用いてよい)。

(1) $y = xe^x$

(2) $y = \sin^{100} 2x$

(3) $y = x^3 \log(2x^3 + x)$

(4) $y = \arcsin(x^2 + 1)$

(5) $y = x^x$

積の微分法及び合成関数の微分法を組み合わせるとできるので，(5) 以外は省略する。(1)–(4) ができない人は少し焦って復習をきちんとすること。

(5) は**対数微分法**と呼ばれる方法を用いる。両辺の対数をとると $\log y = \log x^x = x \log x$ である。

$$\frac{d}{dx} \log y = \frac{dy}{dx} \frac{d}{dy} \log y = \frac{dy}{dx} \frac{1}{y}$$

なので，両辺を x で微分すると $\dfrac{dy}{dx}\dfrac{1}{y} = \dfrac{d}{dx}(x \log x) = \log x + x\dfrac{1}{x} = \log x + 1$ となるので

$$\frac{dy}{dx} = y(\log x + 1) = x^x(\log x + 1)$$

となる。