解析学 I 問題解説 #4

河野

演習問題 1.8　実際に (1) を用いて (2) を証明せよ。

$h(x) = f(x) - g(x)$ とおく。$h'(x) = f'(x) - g'(x)$ であり，$f'(x) = g'(x)$ より $h'(x)$ は区間 I において $h'(x) = 0$ である。(1) よりある定数 C が存在して，区間 I において恒等的に $h(x) = C$ となる。よって $f(x) - g(x) = C$，即ち $f(x) = g(x) + C$ となる。

演習問題 1.9　(1) を証明せよ。

$x_1 < x_2$ を満たす任意の x_1, x_2 に対し平均値の定理を適用するとある c $(x_1 < c < x_2)$ が存在して $f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1)$ と書ける。このとき $f'(c) > 0, x_2 - x_1 > 0$ より $f(x_2) - f(x_1) > 0$ 即ち $f(x_1) < f(x_2)$ となる。よって f は単調増加である。

演習問題 1.10　(1) を証明せよ。

$x_1 < x_2$ を満たす任意の x_1, x_2 に対し平均値の定理を適用するとある c $(x_1 < c < x_2)$ が存在して $f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1)$ と書ける。このとき $f'(c) \geqq 0, x_2 - x_1 > 0$ より $f(x_2) - f(x_1) \geqq 0$ 即ち $f(x_1) \leqq f(x_2)$ となる。よって f は単調非減少である。

演習問題 1.11　定理 1.18 を用いて定理 1.23 を証明せよ。

$\lim_{h \to a} f(x) = 0$，$\lim_{h \to a} g(x) = 0$ なので $f(a), g(a)$ が定義されていない場合は $f(a) = 0, g(a) = 0$ とする。$f(x)$ および $g(x)$ は a 以外で連続なら，このように定義した場合，a も含めて連続になる。

$x > a$ とする。$f(x)$ および $g(x)$ は $[a, x]$ で連続であり，(a, x) で微分可能なので定理 1.18 よりある c $(a < c < x)$ が存在して

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f(x)}{g(x)}$$

が成立する。$x \to a$ のとき $c \to a$ となるので $\lim_{x \to a+0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \to a+0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ が成立する。

次に $x < a$ の場合を考える。$f(x)$ および $g(x)$ は $[x, a]$ で連続であり，(x, a) で微分可能なので定理 1.18 よりある c $(x < c < a)$ が存在して

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(a) - f(x)}{g(a) - g(x)} = \frac{f(x)}{g(x)}$$

が成立する。$x \to a$ のとき $c \to a$ となるので $\lim_{x \to a-0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \to a-0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ が成立する。

2 つを合わせて

$$\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$$

が成り立つ。

演習問題 1.12　次の極限を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}$ (2) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{\log x}{x-1}$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{a^x-b^x}{x}\quad (a,b>0)$ (4) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x-\arcsin x}{x^3}$

(5) $\displaystyle\lim_{x\to 0}(\cos x)^{1/x}$ (6) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\log(x^2+1)-\log x^2\right)$

(1) ロピタルの定理を用いる。

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{6x}=\frac{1}{6}$$

(2) ロピタルの定理を用いる。

$$\lim_{x\to 1}\frac{\log x}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x}}{1}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{x}=1$$

(3) ロピタルの定理を用いる。

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-b^x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{a^x\log a-b^x\log b}{1}=\log a-\log b$$

(4) ロピタルの定理を用いる。

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{x-\arcsin x}{x^3} &= \lim_{x\to 0}\frac{1-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-x^2}-1}{3x^2\sqrt{1-x^2}}\\ &= \frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}\left(1-x^2\right)^{-1/2}(-2x)}{2x\sqrt{1-x^2}+x^2\frac{1}{2}\left(1-x^2\right)^{-1/2}(-2x)}\\ &= \frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\frac{-x}{2x(1-x^2)-x^3}=-\frac{1}{6}\end{aligned}$$

(5) 分数の形になってないのでロピタルの定理を適用する前に一工夫。

$f(x)=\left(\cos x\right)^{1/x}$ とおき，更に $g(x)=\log f(x)$ とおくと $g(x)=\dfrac{\log\left(\cos x\right)}{x}$ となる。ロピタルの定理より

$$\lim_{x\to 0}g(x)=\lim_{x\to 0}\frac{\log\left(\cos x\right)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{-\sin x}{\cos x}=0$$

であり，$\log x$ は連続関数なので

$$0=\lim_{x\to 0}g(x)=\lim_{x\to 0}\log\left(f(x)\right)=\log\left(\lim_{x\to 0}f(x)\right)$$

が成立する。$\log x$ は単射であり，$\log 1=0$ が成立しているので $\log 1=\log\left(\lim_{x\to 0}f(x)\right)$ より $\lim_{x\to 0}f(x)=1$ を得る。

(6) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\log(x^2+1)-\log x^2\right)=\lim_{x\to\infty}\log\frac{x^2+1}{x^2}=\log\left(\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{x^2}\right)=\log 1=0$

演習問題 1.13　次の関数の概形を書け。

(1) $y = x^{-x^2}$ (2) $y = xe^{-x^2}$

(3) $y = \dfrac{x}{1+x^2}$ (4) $y = x\log x \quad (x > 0)$

(5) $y = \dfrac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1}$ (6) $y = e^{-x}\sin x$

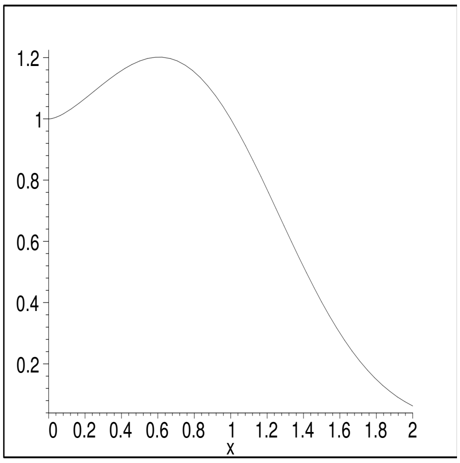
(1) x^{-x^2} が定義されるためには $x > 0$ が必要である。よってこの関数の定義域は $x > 0$ である。$y = x^{-x^2}$ の対数をとると $\log y = -x^2 \log x$ となる。両辺を x で微分すると

$$\frac{y'}{y} = -2x\log x - x^2\frac{1}{x} = -x(2\log x + 1)$$

となる。$y' = 0$ より $2\log x + 1 = 0$, よって $\log x = -\dfrac{1}{2}$ となる。これを解いて $x = \dfrac{1}{\sqrt{e}}$ となる。増減表は

x	0		$\dfrac{1}{\sqrt{e}}$	
y''		$+$	0	$-$
y		$\nearrow$	$e^{1/2e}$	$\searrow$

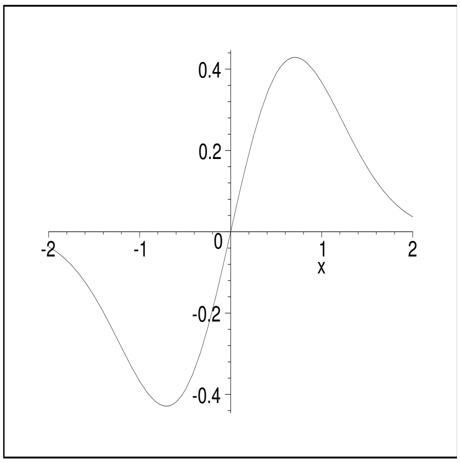
となる。$\displaystyle\lim_{x\to+0} y = 1$, $\displaystyle\lim_{x\to\infty} y = 0$ (ロピタルの定理を用いて実際計算せよ) より図を描くと次の様になっている。



(2) $y' = e^{-x^2} + x(-2x)e^{-x^2} = (1 - 2x^2)e^{-x^2}$ なので $y' = 0$ より $x = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ を得る。増減表は

x		$-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$		$\dfrac{1}{\sqrt{2}}$	
y''	$-$	0	$+$	0	$-$
y	$\searrow$	$-\dfrac{1}{\sqrt{2e}}$	$\nearrow$	$\dfrac{1}{\sqrt{2e}}$	$\searrow$

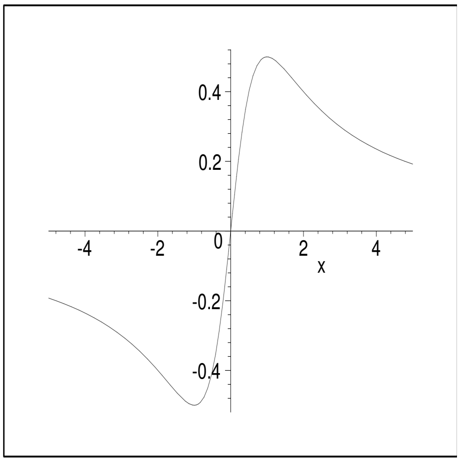
となる。$x = 0$ のとき $y = 0$ なので y 軸との交わりは $y = 0$ である。x 軸との交わりは $y = 0$ を解いて $x = 0$ を得るので $x = 0$ である。$\displaystyle\lim_{x\to-\infty} y = 0$, $\displaystyle\lim_{x\to\infty} y = 0$ に注意して図を描くと次の様になっている。



(3) ここでは凹凸も調べて図を描こう。$y = \dfrac{x}{1+x^2}$ を微分すると $y' = \dfrac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$ となる。$y' = 0$ となるのは $x = -1, 1$ である。これでも増減表は書けるが関数の凹凸も含めて書くために 2 階の導関数を求める。$y'' = \dfrac{-2x(3-x^2)}{(1+x^2)^3}$ となるので $y'' = 0$ となるのは $x = \pm\sqrt{3}, 0$ である。よって増減表は次の様になる。

x		$-\sqrt{3}$		-1		0		1		$\sqrt{3}$	
y'	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
y''	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
y	$\searrow$	$\searrow$	$\searrow$	$-\dfrac{1}{2}$	$\nearrow$	$\nearrow$	$\nearrow$	$\dfrac{1}{2}$	$\searrow$	$\searrow$	$\searrow$

$\displaystyle\lim_{x\to\infty} y = 0,\quad \lim_{x\to-\infty} y = 0$ に注意し，凹凸を考慮して図を書くと次の様になっている。

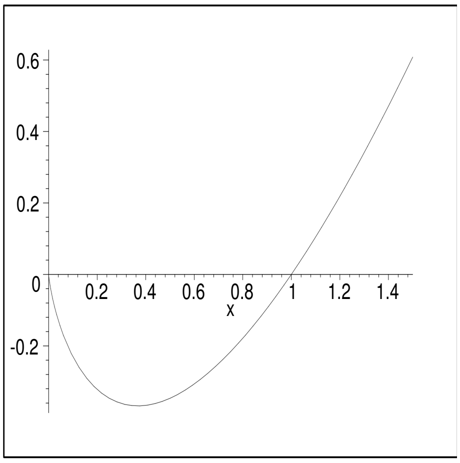


(2) と (3) のグラフは増減だけ調べると同じような形にも見えるが，凹凸を調べると違いがを見ることができる。「一般に概形を描け」という問題が与えられた場合，明示的に指定されていない限り凹凸を調べなければならないということはないが，凹凸を調べることでより正確な概形を描くことが可能になる。

(4) $y' = \log x + x\dfrac{1}{x} = \log x + 1$ なので，$y' = 0$ のとき $x = \dfrac{1}{e}$ を得る。増減表は

x	0		$\dfrac{1}{e}$	
y''		$-$	0	$+$
y		$\searrow$	$-\dfrac{1}{e}$	$\nearrow$

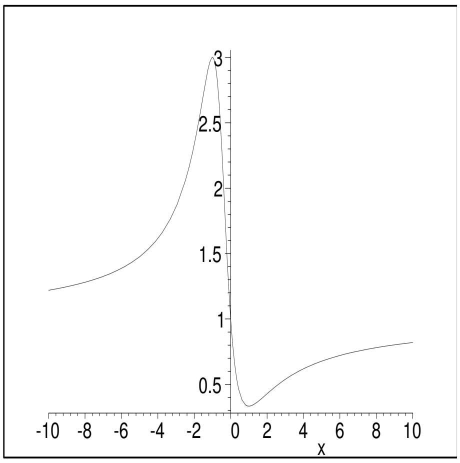
となる。x 軸とは $x = 1$ で交わる。$\displaystyle\lim_{x \to +0} y = 0$ に注意して図を描くと次の様になっている。



(5) $y' = \dfrac{(2x-1)(x^2+x+1) - (x^2-x+1)(2x+1)}{(x^2+x+1)^2} = \dfrac{2(x^2-1)}{(x^2+x+1)^2}$ なので，$y' = 0$ のとき $x = \pm 1$ を得る。増減表は

x		-1		1	
y''	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$\nearrow$	3	$\searrow$	$\dfrac{1}{3}$	$\nearrow$

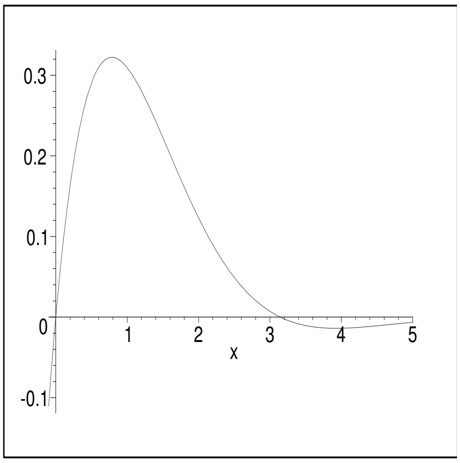
となる。$\displaystyle\lim_{x \to -\infty} y = 1$，$\displaystyle\lim_{x \to \infty} y = 1$ に注意して図を描くと次の様になっている。



(6) $y' = -e^{-x}\sin x + e^{-x}\cos x = e^{-x}(\sin x - \cos x)$ なので，$y' = 0$ のとき $\sin x = \cos x$ より $x = \left(2n + \dfrac{1}{4}\right)\pi, \left(2n + \dfrac{5}{4}\right)\pi$ を得る。ここで n は整数。$2n\pi$ と $2(n+1)\pi$ の間の増減表は

x	$2n\pi$		$\left(2n+\dfrac{1}{4}\right)\pi$		$\left(2n+\dfrac{5}{4}\right)\pi$		$2(n+1)\pi$
y''		$+$	0	$-$	0	$+$	
y		$\nearrow$	$\dfrac{1}{\sqrt{2}}\exp\left(-\left(2n+\dfrac{1}{4}\right)\pi\right)$	$\searrow$	$-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\exp\left(-\left(2n+\dfrac{5}{4}\right)\pi\right)$	$\nearrow$	

となる。$\displaystyle\lim_{x\to-\infty} y = 1$，$\displaystyle\lim_{x\to\infty} y = 1$ に注意して図を描くと次の様になっている。



図は一部を描いている。ここに描いてある図は maple という数式ソフトを用いて描いている。そのため x 軸の正の方向をもう少し描こうとすると，値が 0 に非常に近くなるため，値が 0 のように描かれてしまう (x 軸と一致する)。このグラフは減衰振動と呼ばれるもので振幅が小さくなるが 0 には決してならない。

演習問題 1.14　次のようにパラメータ表示された曲線の概形を書け。

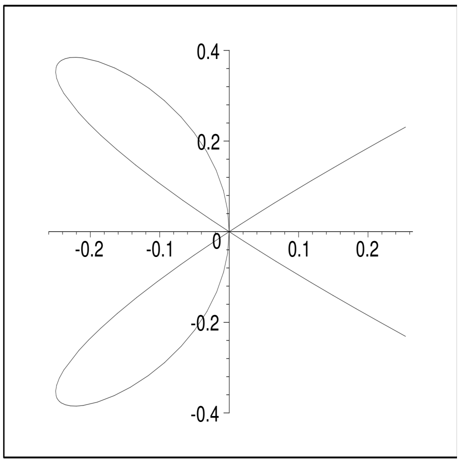
(1) $x = x(t) = t^4 - t^2, y = y(t) = t^3 - t$

(2) $x = x(t) = t - t^3, y = y(t) = 1 - t^4$

(1) $x' = 4t^3 - 2t = 2t(2t^2 - 1)$ となるので，$t = 0, \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ において $x' = 0$ となる。また $y' = 3t^2 - 1$ となるので，$t = \pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ において $y' = 0$ となる。よって増減表は以下の様になる。

t		$-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$		$-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$		0		$\dfrac{1}{\sqrt{3}}$		$\dfrac{1}{\sqrt{2}}$	
x'	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
x	$\leftarrow$		$\rightarrow$	$\rightarrow$	$\rightarrow$		$\leftarrow$	$\leftarrow$	$\leftarrow$		$\rightarrow$
y'	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
y	$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$		$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$		$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$
曲線	$\nwarrow$	$\uparrow$	$\nearrow$	$\rightarrow$	$\searrow$	$\downarrow$	$\swarrow$	$\leftarrow$	$\nwarrow$	$\uparrow$	$\nearrow$

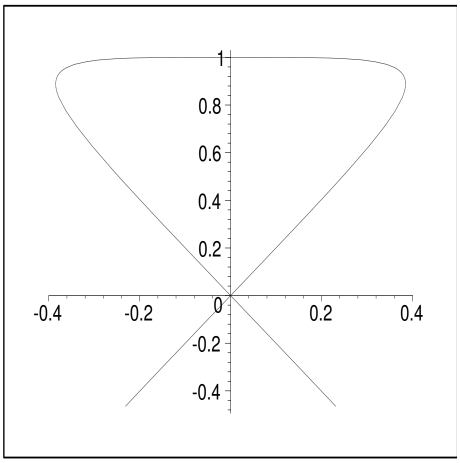
曲線が向きを変えるのは $t=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}},\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}},0$ においてなので，その点は $\left(x\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right),y\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)\right)=\left(-\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\right)$，$\left(x\left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right),y\left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)\right)=\left(-\dfrac{2}{9},\dfrac{2}{3\sqrt{3}}\right)$，$(x\,(0)\,,y\,(0))=(0,0)$，$\left(x\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right),y\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)\right)=\left(-\dfrac{2}{9},-\dfrac{2}{3\sqrt{3}}\right)$，$\left(x\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right),y\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)\right)=\left(-\dfrac{1}{4},-\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\right)$ である。また x 軸との交点は $y(t)=0$ を解いて $t=0,\pm1$ なので $(x(-1),y(-1))=(0,0),(x(0),y(0))=(0,0),(x(1),y(1))=(0,0)$ でいずれも原点である。y 軸との交点も同様になる。以上を考慮して概形を描けば以下の様になる。



(2) $x'=1-3t^2$ となるので，$t=\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ において $x'=0$ となる。また $y'=-t^3$ となるので，$t=0$ において $y'=0$ となる。よって増減表は以下の様になる。

t		$-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$		0		$\dfrac{1}{\sqrt{2}}$	
x'	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$
x	$\leftarrow$		$\rightarrow$	$\rightarrow$	$\rightarrow$		$\leftarrow$
y'	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
y	$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$		$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$
曲線	$\nwarrow$	$\uparrow$	$\nearrow$	$\rightarrow$	$\searrow$	$\downarrow$	$\swarrow$

曲線が向きを変えるのは $t=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}},0$ においてなので，その点は $\left(x\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right),y\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)\right)=\left(-\dfrac{1}{2\sqrt{2}},\dfrac{3}{4}\right)$，$(x\,(0)\,,y\,(0))=(0,1)$，$\left(x\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right),y\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)\right)=\left(\dfrac{1}{2\sqrt{2}},\dfrac{3}{4}\right)$ である。また x 軸との交点は $y(t)=0$ を解いて $t\pm1$ なので $(x(-1),y(-1))=(0,0),(x(1),y(1))=(0,0)$ であり，y 軸との交点は $(x(-1),y(-1))=(0,0),(x(0),y(0))=(0,1),(x(1),y(1))=(0,0)$ である。以上を考慮して概形を描けば以下の様になる。


1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
-0.4
-0.2
0.2
0.4