

演習問題 1.15 近似の度合の最もよい 3 次式を求めよ。ただし 3 次式  $y = a + bh + ch^2 + dh^3$  が近似の度合が最もよいとは  $f(x+h) - (a + bh + ch^2 + dh^3) = \varepsilon h^3$  と置いたとき  $\lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon = 0$  が成立する事をいう。

近似の度合の最もよい 4 次式を求めよ。ただし 4 次式  $y = a + bh + ch^2 + dh^3 + eh^4$  が近似の度合が最もよいとは  $f(x+h) - (a + bh + ch^2 + dh^3 + eh^4) = \varepsilon h^4$  と置いたとき  $\lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon = 0$  が成立する事をいう。

$f(x+h) = a + bh + ch^2 + dh^3 + \varepsilon h^3$  において  $h \rightarrow 0$  とすると右辺の極限值は  $a$ 、左辺の極限值は  $f(x)$ <sup>(1)</sup>である。よって  $a = f(x)$  が分かる。

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = b + ch + dh^2 + \varepsilon h^2$$

と変形して  $h \rightarrow 0$  とすると、右辺の極限值は  $b$ 、左辺の極限值は  $f'(x)$  である。よって  $b = f'(x)$  を得る。

$$\frac{f(x+h) - f(x) - f'(x)h}{h^2} = c + dh + \varepsilon h$$

と変形して  $h \rightarrow 0$  とすると右辺の極限は  $c$  である。左辺はロピタルの定理を適用して (ただし変数は  $x$  でなくて  $h$  である。微分も  $x$  に関する微分ではなく  $h$  に関する微分である)

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x) - f'(x)h}{h^2} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(x+h) - f'(x)}{2h} = \frac{f''(x)}{2}$$

となる。よって  $c = \frac{f''(x)}{2}$  となる。

$$\frac{f(x+h) - f(x) - f'(x)h - \frac{f''(x)}{2}h^2}{h^3} = d + \varepsilon$$

と変形して  $h \rightarrow 0$  とすると、右辺の極限值は  $d$  となる。左辺はロピタルの定理を 2 度適用すると

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x) - f'(x)h - \frac{f''(x)}{2}h^2}{h^3} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(x+h) - f'(x) - f''(x)h}{3h^2} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f''(x+h) - f''(x)}{6h} \\ &= \frac{f'''(x)}{6} \end{aligned}$$

となる。よって  $d = \frac{f'''(x)}{6}$  となる。以上により求める 3 次式は

$$f(x) + f'(x)h + \frac{f''(x)}{2}h^2 + \frac{f'''(x)}{6}h^3$$

となる。

<sup>(1)</sup>この節では関数は何回でも微分できると仮定している。微分可能な関数は連続である。

4次式の場合も前半は3次式での近似の場合と同様に証明が進む。よって  $a = f(x), b = f'(x), c = \frac{f''(x)}{2}, d = \frac{f'''(x)}{6}$  は示されているとする。

$$F(h) = \frac{f(x+h) - f(x) - f'(x)h - \frac{f''(x)}{2}h^2 - \frac{f'''(x)}{6}h^3}{h^4}$$

とおく。  $F(h) = e + \varepsilon$  なので  $h \rightarrow 0$  とすると右辺は  $e$  となる。左辺はロピタルの定理を3回用いると

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} F(h) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(x+h) - f'(x) - f''(x)h - \frac{f'''(x)}{2}h^2}{4h^3} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f''(x+h) - f''(x) - f'''(x)h}{12h^2} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'''(x+h) - f'''(x)}{24h} \\ &= \frac{f^{(4)}(x)}{24} \end{aligned}$$

となる。よって求める4次式は

$$f(x) + f'(x)h + \frac{f''(x)}{2}h^2 + \frac{f'''(x)}{6}h^3 + \frac{f^{(4)}(x)}{24}h^4$$

である。

**演習問題 1.16** 次の関数の  $x = 0$  におけるテーラー級数を求めよ (テーラー展開可能であることは仮定してよい)。

- |                              |                            |
|------------------------------|----------------------------|
| (1) $f(x) = \log(1+x)$       | (2) $f(x) = \frac{1}{1-x}$ |
| (3) $f(x) = \sqrt{1+x}$      | (4) $f(x) = \frac{1}{1+x}$ |
| (5) $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ |                            |

(1)  $f'(x) = \frac{1}{1+x}, f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}, f'''(x) = \frac{2}{(1+x)^3}$  なので  $f^{(n)}(x) = (-1)^{n+1} \frac{(n-1)!}{(1+x)^n}$  ( $n \geq 1$ ) と予想して数学的帰納法で証明する。 $n = 1$  のときはすでに計算して成立している。 $n = k$  のときの成立を仮定する。即ち  $f^{(k)}(x) = (-1)^{k+1} \frac{(k-1)!}{(1+x)^k}$  の成立を仮定する。両辺を  $x$  で微分すると

$$f^{(k+1)}(x) = (-1)^{k+1} \frac{-k(k-1)!}{(1+x)^{k+1}} = (-1)^{(k+1)+1} \frac{((k+1)-1)!}{(1+x)^{k+1}}$$

となるので  $n = k + 1$  でも成立している。よってすべての  $n$  で成立する。 $f(0) = 0, f^{(n)}(0) = (-1)^{n+1}(n-1)! (n \geq 1)$  なので

$$\begin{aligned} f(x) &= f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2!}f''(0)x^2 + \dots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(0)x^n + \dots \\ &= x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \dots + (-1)^{n+1} \frac{1}{n}x^n + \dots \end{aligned}$$

となる。

(2)  $f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2}, f''(x) = \frac{2}{(1-x)^3}$  なので  $f^{(n)}(x) = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}}$  と予想して数学的帰納法で証明する。 $n=1$  のときはすでに計算して成立している。 $n=k$  のときの成立を仮定する。即ち  $f^{(k)}(x) = \frac{k!}{(1-x)^{k+1}}$  の成立を仮定する。両辺を  $x$  で微分すると

$$f^{(k+1)}(x) = \frac{k!(k+1)}{(1-x)^{k+2}} = \frac{(k+1)!}{(1-x)^{(k+1)+1}}$$

となるので  $n=k+1$  でも成立している。よってすべての  $n$  で成立する。 $f(0) = 1, f^{(n)}(0) = n!$  ( $n \geq 1$ ) なので

$$\begin{aligned} f(x) &= f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2!}f''(0)x^2 + \cdots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(0)x^n + \cdots \\ &= 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots \end{aligned}$$

となる。

(3) ここでは  $f(x) = (1+x)^\alpha$  のテーラー級数を求める。 $\alpha = \frac{1}{2}$  とおくとこの問題の解となる。

最初に記号を定義しておく。 $\alpha$  と自然数  $n$  に対し  $\binom{\alpha}{n} = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)$  と書くことにする。 $f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1}, f''(x) = \alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2}$  なので

$$f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n}$$

と予想される。ここでは数学的帰納法による証明は省略する。

$$\frac{1}{n!}f^{(n)}(0) = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} = \binom{\alpha}{n}$$

なのでテーラー級数は

$$f(x) = 1 + \binom{\alpha}{1}x + \binom{\alpha}{2}x^2 + \cdots + \binom{\alpha}{n}x^n + \cdots$$

となる。

(4) 前問までと同様に解いてもよいが、ここでは (2) の結果を利用して解く。 $g(x) = \frac{1}{1-x}$  とおくと (2) より

$$g(x) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots$$

が成立した。 $f(x) = g(-x)$  なので

$$\begin{aligned} f(x) &= g(-x) = 1 + (-x) + (-x)^2 + \cdots + (-x)^n + \cdots \\ &= 1 - x + x^2 + \cdots + (-1)^n x^n + \cdots \end{aligned}$$

となる。

(5) (3) でと同様に解いてもよいが、ここでは (4) の結果を利用して解く。 $g(x) = \frac{1}{1+x}$  とおくと (4) より

$$g(x) = 1 - x + x^2 + \cdots + (-1)^n x^n + \cdots$$

が成立した。 $f(x) = g(x^2)$  なので

$$\begin{aligned} f(x) &= g(x^2) = 1 - (x^2) + (x^2)^2 + \cdots + (-1)^n (x^2)^n + \cdots \\ &= 1 - x^2 + x^4 + \cdots + (-1)^n x^{2n} + \cdots \end{aligned}$$

となる。

演習問題 1.17 次の関数を  $x = a$  でテーラー (級数) 展開せよ (テーラー展開可能であることは仮定してよい)。

(1)  $f(x) = x^5 \quad (a = 1)$

(2)  $f(x) = e^x \quad (a = 1)$

(3)  $f(x) = \sin x \quad (a = \pi)$

(4)  $f(x) = \log x \quad (a = 1)$

(1)  $f'(x) = 5x^4, f''(x) = 20x^3, f'''(x) = 60x^2, f^{(4)}(x) = 120x, f^{(5)}(x) = 120, f^{(n)}(x) = 0$  ( $n > 5$ ) なので

$$f(x) = 1 + 5(x-1) + 10(x-1)^2 + 10(x-1)^3 + 5(x-1)^4 + (x-1)^5$$

となる。

別解:  $f(x) = (1 + (x-1))^5$  を展開して

$$f(x) = 1 + 5(x-1) + 10(x-1)^2 + 10(x-1)^3 + 5(x-1)^4 + (x-1)^5$$

となる。

(2)  $f^{(n)}(x) = e^x$  なので

$$f(x) = e + e(x-1) + \frac{1}{2!}e(x-1)^2 + \cdots + \frac{1}{n!}e(x-1)^n + \cdots$$

となる。

(3)  $f^{(2k)}(x) = (-1)^k \sin x, f^{(2k+1)}(x) = (-1)^k \cos x$  となるので (証明省略),  $f^{(2k)}(\pi) = 0, f^{(2k+1)}(\pi) = (-1)^k \cos \pi = (-1)^{k+1}$  となる。よって

$$f(x) = -(x-\pi) + \frac{1}{3!}(x-\pi)^3 - \frac{1}{5!}(x-\pi)^5 + \cdots + (-1)^{k+1} \frac{1}{(2k+1)!}(x-\pi)^{2k+1} + \cdots$$

となる。

(4)  $f^{(n)}(x)$  は演習問題 1.16 (1) と同様に計算すると,  $f^{(n)}(x) = (-1)^{n+1} \frac{(n-1)!}{x^n}$  であることが分かる。よって

$$f(x) = (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \cdots + (-1)^{n+1} \frac{1}{n}(x-1)^n + \cdots$$

となる。