解析学 I 問題解説 #8

河野

演習問題 2.12　次の関数を (a,b) において $n=3$ とし，剰余項を無視したテーラー展開を求めよ。

(1) $z=f(x,y)=(x-1)(y+2)$　$(a,b)=(0,0)$

(2) $z=f(x,y)=\dfrac{1}{1-2x+3y}$　$(a,b)=(0,0)$

(3) $z=f(x,y)=\sin(x+y)$　$(a,b)=\left(\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$

$n=3$ で剰余項無視した式は

$$f(a,b)+f_x(a,b)(x-a)+f_y(a,b)(y-b)+\frac{1}{2}\left\{f_{xx}(a,b)(x-a)^2+2f_{xy}(a,b)(x-a)(y-b)+f_{yy}(a,b)(y-b)^2\right\}$$

である。

(1)　$f_x=y+2, f_y=x-1, f_{xx}=0, f_{yy}=0, f_{xy}=1$ なので

$$-2+2x-y+xy$$

となる。

(2)　$f_x=2(1-2x+3y)^{-2}, f_y=-3(1-2x+3y)^{-2}, f_{xx}=8(1-2x+3y)^{-3}, f_{xy}=-12(1-2x+3y)^{-3}, f_{yy}=18(1-2x+3y)^{-3}$ なので

$$1+2x-3y+4x^2-12xy+9y^2$$

となる。

(3)　$f_x=f_y=\cos(x+y), f_{xx}=f_{xy}=f_{yy}=-\sin(x+y)$ なので

$$-\left(x-\frac{\pi}{2}\right)-\left(y-\frac{\pi}{2}\right)$$

となる。

演習問題 2.13　次の関数の極大・極小を求めよ。

(1) $z=x^2-xy+y^2-2x+3y+1$

(2) $z=x^2-5xy+2y^2+x-y-3$

(3) $z=\dfrac{ax+by}{x^2+y^2+1}$ $(a\neq 0, b\neq 0)$

(4) $z=e^{-(x^2+y^2)}(ax^2+by^2)$ $(a>b>0)$

(1)　(1) 最初に臨界点を求める。$z_x=2x-y-2, z_y=-x+2y+3$ なので連立方程式 $z_x=0, z_y=0$ を解くと $x=\dfrac{1}{3}, y=-\dfrac{4}{3}$ が得られる。(2) 次にヘッシアンを計算する。$z_{xx}=2, z_{yy}=2, z_{xy}=-1$ なので $H(x,y)=2^2-(-1)^2=3>0, z_x>0$ である。よって z は $\left(\dfrac{1}{3},-\dfrac{4}{3}\right)$ で極小値 $-\dfrac{4}{3}$ をとる。

(2)　(1) 同様に計算すると $\left(-\dfrac{1}{17},\dfrac{3}{17}\right)$ が臨界点であるが，$H(x,y)=-17<0$ である。臨界点が極値を与えないので極値は存在しない。

(3)　$z_x=\dfrac{a}{x^2+y^2+1}-\dfrac{2(ax+by)x}{(x^2+y^2+1)^2}$, $z_y=\dfrac{b}{x^2+y^2+1}-\dfrac{2(ax+by)y}{x^2+y^2+1}^{2}$ なので臨界点は連立方程式 $z_x=0, z_y=0$ の解である。$z_x=0$ より $x=\dfrac{x^2+y^2+1}{2(ax+by)}a$ となる。また $z_y=0$

より $y = \dfrac{x^2+y^2+1}{2(ax+by)}b$ となる。$k = \dfrac{x^2+y^2+1}{2(ax+by)}$ とおくと $x = ka, y = bk$ となる。これを $z_x(x^2+y^2+1) = a(x^2+y^2+1) - 2(ax+by)x = 0$ に代入して

$$a((a^2+b^2)k^2+1) - 2(a^2+b^2)ak^2 = 0$$

を得る。これを解くと $k = \pm\dfrac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}$ となるので，臨界点は

$$(x,y) = \left(\pm\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \pm\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$$

である。

$$H(x,y) = \begin{vmatrix} \dfrac{2(ax^3-3y^2ax-3ax+3byx^2-by^3-by)}{(x^2+y^2+1)^3} & \dfrac{2(3ayx^2-ay^3-ay-bx^3+3bxy^2-bx)}{(x^2+y^2+1)^3} \\ \dfrac{2(3ayx^2-ay^3-ay-bx^3+3bxy^2-bx)}{(x^2+y^2+1)^3} & -\dfrac{2(3byx^2-by^3+3by-3y^2ax+ax^3+ax)}{(x^2+y^2+1)^3} \end{vmatrix}$$

となるが，

$$H\left(\pm\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \pm\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right) = \begin{vmatrix} \dfrac{\sqrt{s^2+b^2}}{2} & 0 \\ 0 & \dfrac{\sqrt{a^2+b^2}}{2} \end{vmatrix} = \frac{a^2+b^2}{4} > 0$$

なので $(x,y) = \left(\pm\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \pm\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$ は極大値を与える。極値は

$$z\left(\pm\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \pm\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right) = \frac{a^2+b^2}{a^2+b^2+1}$$

である。ここで $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad-bc$ という記法を使った。

(4) $z_x = -2xe^{-(x^2+y^2)}(ax^2+by^2) + 2e^{-(x^2+y^2)}ax, z_y = -2ye^{-(x^2+y^2)}(ax^2+by^2) + 2e^{-(x^2+y^2)}by$ なので連立方程式 $z_x = 0, z_y = 0$ を解くと (ここの計算は各自実行すること)

$$(x,y) = (0,0), (0,\pm1), (\pm1,0)$$

となる。

$$H(x,y) = \begin{vmatrix} 2e^{-(x^2+y^2)}(-5ax^2-by^2+2x^4a+2x^2by^2+a) & 4xye^{-(x^2+y^2)}(ax^2+by^2-b-a) \\ 4xye^{-(x^2+y^2)}(ax^2+by^2-b-a) & 2e^{-(x^2+y^2)}(-ax^2-5by^2+2y^2ax^2+2y^4b+b) \end{vmatrix}$$

なので

$$\begin{aligned} H(0,0) &= \begin{vmatrix} 2a & 0 \\ 0 & 2b \end{vmatrix} = 4ab > 0 \\ H(0,1) &= \begin{vmatrix} \dfrac{2(a-b)}{e} & 0 \\ 0 & -\dfrac{4b}{e} \end{vmatrix} = -\frac{8(a-b)b}{e^2} < 0 \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
H(0,-1) &= \begin{vmatrix} \dfrac{2(a-b)}{e} & 0 \\ 0 & -\dfrac{4b}{e} \end{vmatrix} = -\frac{8(a-b)b}{e^2} < 0 \\
H(1,0) &= \begin{vmatrix} -\dfrac{4a}{e} & 0 \\ 0 & \dfrac{2(b-a)}{e} \end{vmatrix} = -\frac{8(b-a)a}{e^2} > 0 \\
H(-1,0) &= \begin{vmatrix} -\dfrac{4a}{e} & 0 \\ 0 & \dfrac{2(b-a)}{e} \end{vmatrix} = -\frac{8(b-a)a}{e^2} > 0
\end{aligned}
$$

となる。よって z は $(x,y)=(0,0)$ で極小値 $z(0,0)=0$，$(x,y)=(\pm 1,0)$ で極大値 $z(\pm 1,0)=\dfrac{a}{e}$ をとる。

演習問題 2.14

(1) 3 辺の和が一定の 3 角形の中で面積最大のものを求めよ。

(2) 定円に内接する 3 角形のなかで面積最大のものを求めよ。

(1)　このタイプの問題では何を変数に選ぶかで計算量が変わる。ここではヘロンの公式を用いて解こう。ヘロンの公式：3 角形の 3 辺の長さを a,b,c とするとき，$s=\dfrac{a+b+c}{2}$ とおくとき，3 角形の面積 S は $S=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ となる。

3 角形の各辺の長さを x,y,z とする。3 辺の長さの和は一定であるのでこれを $2s$ とおく，即ち $x+y+z=2s$ $(s>0)$ が成立している。x,y,z は辺の長さであるから $x>0, y>0, z>0$ を満たしている。x,y,z が 3 角形の 3 辺をなすためには 3 角不等式，即ち $x+y>z, y+z>x, z+x>y$ が成立している事が必要である。逆にこれらの不等式が成立しているとき，3 辺の長さが x,y,z であるような 3 角形が存在する。z を消去して x,y の不等式から $x<s, y<s, x+y>s$ が得られる。逆にこの 3 つの不等式をみたす x,y は最初の 6 つの不等式を満たす。(この部分は各自チェックする事。) よって $D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,\middle|\, x<s, y<s, x+y>s\right\}$ 上で最大値問題を考える。しかし講義で述べた様に，最大値定理を適用するには領域が有界閉集合である必要がある。

$\overline{D}=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,\middle|\, x\leqq s, y\leqq s, x+y\geqq s\right\}$ とおく。ここで S が最大のとき S^2 が最大であり，逆も成立する。よって S^2 が最大になる場合を求めるればよい。$f(x,y)=S^2=s(s-x)(s-y)(x+y-s)$ とおき，$\overline{D}$ 上で $f(x,y)$ の最大値を求める。$\overline{D}$ は有界閉集合であり，$f(x,y)$ は $\overline{D}$ 上の連続関数なので最大値が存在する。境界上または内部の点が最大値を与える。境界上では関数は $f(x,y)=0$ となる。内部で最大値をとる点は (広義の) 極値になっている。臨界点を求める。$f_x=s(s-x)(s-y)-s(s-y)(x+y-s)=0$，$f_y=s(s-x)(s-y)-s(s-x)(x+y-s)=0$ より $(x,y)=(0,s).(s,0),(s,s),\left(\dfrac{2s}{3},\dfrac{2s}{3}\right)$ が得られる。この中に最大値を与える点が存在するので，それは $(x,y)=\left(\dfrac{2s}{3},\dfrac{2s}{3}\right)$ である。以上により最大値を与える 3 角形は**正 3 角形**である。

(2)　定円を点 O を中心とする半径 r の円とする。円に内接する 3 角形を ABC とする。角 $\angle AOB=s, \angle BOC=t, \angle COA=u$ とおくと $s+t+u=2\pi$ が成立している。最大面積を求めるので，ABC は O を含んでいるとしてよい。このとき ABC が 3 角形をなす条件は $0<s<\pi, 0<t<\pi, 0<u<\pi$ である。この不等式が定義する領域を D とすると $D=\left\{(s,t)\in\mathbb{R}^2 \,\middle|\, s<\pi, t<\pi, s+t>\pi\right\}$ と

なる (各自チェックすること)。

3 角形 ABC の面積 S は

$$S = \frac{1}{2}r^2\left(\sin s + \sin t + \sin(2\pi - s - t)\right)$$

なので, $\overline{D} = \left\{ (s,t) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, s \leqq \pi, t \leqq \pi, s+t \geqq \pi \right\}$ 上で $z = f(s,t) = \dfrac{1}{2}r^2\left(\sin s + \sin t + \sin(2\pi - s - t)\right)$ の最大値を求める問題になる。以下略

演習問題 2.15 次で与えられる陰関数に関し $\dfrac{dy}{dx}, \dfrac{d^2y}{dx^2}$ を求めよ。

(1) $1 - y + xe^y = 0$

(2) $x^3y^3 + y - x = 0$

(1) 式の両辺を x で微分すると

$$-y' + e^y + xe^y y' = 0 \tag{1}$$

となる。よって

$$y' = \frac{e^y}{1 - xe^y}$$

となる。式 (1) の両辺を x で微分すると

$$-y'' + 2e^y y' + xe^y (y')^2 + xe^y y'' = 0$$

となるので

$$y'' = \frac{e^{2y}(2 - xe^y)}{(1 - xe^y)^2}$$

となる。

(2) 式の両辺を x で微分すると

$$3x^2y^3 + 3x^3y^2y' + y' - 1 = 0 \tag{2}$$

となる。よって

$$y' = \frac{1 - 3x^2y^3}{1 + 3x^3y^2}$$

となる。式 (2) の両辺を x で微分すると

$$6xy^3 + 18x^2y^2y' + 6x^3y(y')^2 + 3x^3y^2y'' + y'' = 0$$

となるので

$$y'' = \frac{6xy(9x^6y^6 + 3x^3y^4 - y^2 - 3x^4y^3 - 3xy - x^2)}{(1 + 3x^3y^2)^3}$$

となる。