解析学 I 問題解説 #10

河野

演習問題 4.1　次の条件の下で微分方程式を立てよ。

(1) 曲線 $y = f(x)$ 上の点を P とする。P における法線が x 軸と交わる点を N，P から x 軸へ下ろした垂線の足を Q とすると線分 QN の長さが常に一定である。

(2) 曲線 $y = f(x)$ 上の点を P とする。P における接線が x 軸と交わる点を S，y 軸と交わる点を T とすると点 P は線分 ST の中点である。

(3) 空気中を落下する物体に働く空気の抵抗は速度の 2 乗に比例する。比例定数を k，重力定数を g とする。速度を v とするとき v が満たすべき微分方程式を求めよ。

(1)　点 $P(x, y)$ における接線の方程式は $Y = y'(X - x) + y$ なので，法線の方程式は

$$Y = -\frac{1}{y'}(X - x) + y$$

である。N は法線上の点なので座標を $(x_0, 0)$ とすると，$0 = -\dfrac{1}{y'}(x_0 - x) + y$ が成立する。今 $x_0 - x$ が一定なのでこれを C(定数) とおくと微分方程式

$$y'y = C$$

を得る。

(2)　接線の方程式は (1) と同様で

$$Y = y'(X - x) + y$$

である。T の座標は $(0, 2y)$ なので $2y = y'(0 - x) + y$ 満たすべき微分方程式は

$$y'x + y = 0$$

である。

(3)　運動方程式は力を F 加速度を a 質量を m としたとき

$$F = ma$$

であった。下向きを正の方向にとると働く力は重力と空気の抵抗力なので，$F = mg - kv^2$ となる。よって求める微分方程式は

$$mg - kv^2 = mv'$$

である。

演習問題 4.2　次の微分方程式を解け。

(1) $yy' + x = 0$　　(2) 演習問題 4.1 (1) で得られた微分方程式

(3) 演習問題 4.1 (2) で得られた微分方程式　　(4) 演習問題 4.1 (3) で得られた微分方程式

ここは変数分離型で解く。

(1) $y\dfrac{dy}{dx}+x=0$ なので，$ydy=-xdx$ となる。両辺を積分して，$\displaystyle\int ydy=-\int xdx$ より $\dfrac{1}{2}y^2=-\dfrac{1}{2}x^2+C$ を得る。よって

$$x^2+y^2=2C$$

を得る。

(2) $y\dfrac{dy}{dx}=C$ より $ydy=Cdx$ を積分して，$\dfrac{1}{2}y^2=Cx+C_1$ となる。よって

$$y=\pm\sqrt{Cx+C_1}$$

を得る。

(3) $x\dfrac{dy}{dx}+y=0$ より $\dfrac{1}{y}dy=-\dfrac{1}{x}dx$ を積分して，$\log|y|=-\log|x|+C_1$ となる。$C_1=\log C$ とおくと，$\log|y|=\log\dfrac{C}{|x|}$ となる。よって

$$y=\pm\frac{C}{x}$$

を得る。

(4) $mg-kv^2=m\dfrac{dv}{dt}$ より $\dfrac{1}{g-\dfrac{k}{m}v^2}dv=dt$ となり，

$$\frac{1}{2\sqrt{g}}\left(\frac{1}{\sqrt{g}-\sqrt{\dfrac{k}{m}}v}+\frac{1}{\sqrt{g}+\sqrt{\dfrac{k}{m}}v}\right)dv=dt$$

と変形して積分すると，

$$\frac{1}{2\sqrt{g}}\left(\sqrt{\frac{m}{k}}\log\left(\sqrt{g}+\sqrt{\frac{k}{m}}v\right)-\sqrt{\frac{m}{k}}\log\left|\sqrt{g}-\sqrt{\frac{k}{m}}v\right|\right)=t+C_1$$

を得る。初期値を $v=0$ と考えると $\sqrt{g}-\sqrt{\dfrac{k}{m}}v>0$ と仮定できるので，絶対値をはずして変形すると，

$$\log\left(\frac{\sqrt{g}+\sqrt{\dfrac{k}{m}}v}{\sqrt{g}-\sqrt{\dfrac{k}{m}}v}\right)=2\sqrt{g}\sqrt{\frac{k}{m}}(t+C_1)$$

となるので，

$$\frac{\sqrt{g}+\sqrt{\dfrac{k}{m}}v}{\sqrt{g}-\sqrt{\dfrac{k}{m}}v}=\exp\left(2\sqrt{g}\sqrt{\frac{k}{m}}(t+C_1)\right)$$

となる。よって

$$v=\sqrt{g}\sqrt{\frac{m}{k}}\frac{\exp\left(2\sqrt{g}\sqrt{\dfrac{k}{m}}(t+C_1)\right)-1}{\exp\left(2\sqrt{g}\sqrt{\dfrac{k}{m}}(t+C_1)\right)+1}$$

を得る。$t \to \infty$ としたとき $v \to \sqrt{g}\sqrt{\dfrac{m}{k}}$ となる。よってこの条件下では落下速度は $\sqrt{g}\sqrt{\dfrac{m}{k}}$ を超えない。

演習問題 4.3　次の微分方程式を演算子法を用いて解け。ただし解関数は複素数値関数でもよいとする。

(1) $y' + y\sin x = 0$
(2) $y' + (x+1)y = 0$
(3) $y' + e^{2x}y = 0$
(4) $y'' - 5y' + 6y = 0$
(5) $y'' - y' - 6y = 0$
(6) $y'' + y = 0$
(7) $y'' + 4y = 0$
(8) $y'' - 2y' + y = 0$
(9) $y'' + 4y' + 4y = 0$

(1)　与えられた微分方程式を演算子を用いて書き直すと

$$(D + \sin x)y = 0$$

となる。$\displaystyle\int -\sin x dx = \cos x$ なので

$$D + \sin x = \exp(\cos x)\, D \exp(-\cos x)$$

を用いると，微分方程式は

$$\exp(\cos x)\, D \exp(-\cos x)\, y = 0$$

となる。$u = \exp(-\cos x)\, y$ とおくと $\exp(\cos x)\, Du = 0$ より $Du = 0$ を得る。これを積分すると $u = C$ (定数) となる。$\exp(-\cos x)\, y = u = C$ より

$$y = C\exp(\cos x)$$

を得る。

(2)　与えられた微分方程式を演算子を用いて書き直すと

$$(D + x + 1)y = 0$$

となる。$\displaystyle\int -(x+1)dx = -\frac{1}{2}x^2 - x$ なので

$$D + x + 1 = \exp\left(-\frac{1}{2}x^2 - x\right) D \exp\left(\frac{1}{2}x^2 + x\right)$$

を用いると，微分方程式は

$$\exp\left(-\frac{1}{2}x^2 - x\right) D \exp\left(\frac{1}{2}x^2 + x\right) y = 0$$

となる。$u = \exp\left(\dfrac{1}{2}x^2 + x\right) y$ とおくと $\exp\left(-\dfrac{1}{2}x^2 - x\right) Du = 0$ より $Du = 0$ を得る。これを積分すると $u = C$ (定数) となる。$\exp\left(\dfrac{1}{2}x^2 + x\right) y = u = C$ より

$$y = C\exp\left(-\frac{1}{2}x^2 - x\right)$$

を得る。

(3) 与えられた微分方程式を演算子を用いて書き直すと

$$(D+e^{2x})y=0$$

となる。$\displaystyle\int -e^{2x}dx=-\frac{1}{2}e^{2x}$ なので

$$D+e^{2x}=\exp\left(-\frac{1}{2}e^{2x}\right)D\exp\left(\frac{1}{2}e^{2x}\right)$$

を用いると，微分方程式は

$$\exp\left(-\frac{1}{2}e^{2x}\right)D\exp\left(\frac{1}{2}e^{2x}\right)y=0$$

となる。$u=\exp\left(\frac{1}{2}e^{2x}\right)y$ とおくと $\exp\left(-\frac{1}{2}e^{2x}\right)Du=0$ より $Du=0$ を得る。これを積分すると $u=C$ (定数) となる。$\exp\left(\frac{1}{2}e^{2x}\right)y=u=C$ より

$$y=C\exp\left(-\frac{1}{2}e^{2x}\right)$$

を得る。

(4) 与えられた微分方程式を演算子を用いて書き直すと

$$(D^2-5D+6)y=0$$

となる。$(D-3)(D-2)=D^2-5D+6$ なので微分方程式は

$$(D-3)(D-2)y=0$$

となる。$v=(D-2)y$ とおき，$D-3=e^{3x}De^{-3x}$ を用いて変形すると

$$e^{3x}De^{-3x}v=0$$

となる。$u=e^{-3x}v$ とおくと，$Du=0$ を得る。これを積分すると $u=C_1$ (定数) となる。$e^{-3x}v=u=C_1$ より

$$v=C_1e^{3x}$$

を得る。$v=(D-2)y=e^{2x}De^{-2x}y$ より $w=e^{-2x}y$ とおくと $e^{2x}Dw=C_1e^{3x}$ なので

$$Dw=C_1e^{x}$$

となる。これを積分すると

$$w=C_1e^{x}+C_2$$

なので，

$$y=we^{2x}=C_1e^{3x}+C_2e^{2x}$$

となる。

(5)　与えられた微分方程式を演算子を用いて書き直すと

$$(D^2 - D - 6)y = 0$$

となる。$(D-3)(D+2) = D^2 - D - 6$ なので微分方程式は

$$(D-3)(D+2)y = 0$$

となる。$v = (D+2)y$ とおき，$D - 3 = e^{3x}De^{-3x}$ を用いて変形すると

$$e^{3x}De^{-3x}v = 0$$

となる。$u = e^{-3x}v$ とおくと，$Du = 0$ を得る。これを積分すると $u = C_1$ (定数) となる。$e^{-3x}v = u = C_1$ より

$$v = C_1e^{3x}$$

を得る。$v = (D+2)y = e^{-2x}De^{2x}y$ より $w = e^{2x}y$ とおくと $e^{-2x}Dw = C_1e^{3x}$ なので

$$Dw = C_1e^{5x}$$

となる。これを積分すると

$$w = \frac{C_1}{5}e^{5x} + C_2$$

なので，

$$y = we^{-2x} = \frac{C_1}{5}e^{3x} + C_2e^{-2x}$$

となる。$\dfrac{C_1}{5}$ を改めて C_1 におき直すと

$$y = C_1e^{3x} + C_2e^{2x}$$

が得られる。

(6)　与えられた微分方程式を演算子を用いて書き直すと

$$(D^2 + 1)y = 0$$

となる。$(D-i)(D+i) = D^2 + 1$ なので微分方程式は

$$(D-i)(D+i)y = 0$$

となる。$v = (D+i)y$ とおき，$D - i = e^{ix}De^{-ix}$ を用いて変形すると

$$e^{ix}De^{-ix}v = 0$$

となる。$u = e^{-ix}v$ とおくと，$Du = 0$ を得る。これを積分すると $u = C_1$ (定数) となる。$e^{-ix}v = u = C_1$ より

$$v = C_1e^{ix}$$

を得る。$v = (D+i)y = e^{-ix}De^{ix}y$ より $w = e^{ix}y$ とおくと $e^{-i}Dw = C_1e^{ix}$ なので

$$Dw = C_1e^{i2x}$$

となる。これを積分すると

$$w = \frac{C_1}{2i} e^{i2x} + C_2$$

なので,

$$y = we^{-ix} = \frac{C_1}{2i} e^{ix} + C_2 e^{-ix}$$

となる。$\dfrac{C_1}{2i}$ を改めて C_1 におき直すと

$$y = C_1 e^{ix} + C_2 e^{-ix}$$

が得られる。

(7)　与えられた微分方程式を演算子を用いて書き直すと

$$(D^2 + 4)y = 0$$

となる。$(D-2i)(D+2i) = D^2 + 4$ なので微分方程式は

$$(D-2i)(D+2i)y = 0$$

となる。$v = (D+2i)y$ とおき，$D - 2i = e^{i2x} D e^{-i2x}$ を用いて変形すると

$$e^{i2x} D e^{-i2x} v = 0$$

となる。$u = e^{-i2x} v$ とおくと，$Du = 0$ を得る。これを積分すると $u = C_1$ (定数) となる。$e^{-i2x} v = u = C_1$ より

$$v = C_1 e^{i2x}$$

を得る。$v = (D+2i)y = e^{-i2x} D e^{i2x} y$ より $w = e^{i2x} y$ とおくと $e^{-i2x} Dw = C_1 e^{i2x}$ なので

$$Dw = C_1 e^{i4x}$$

となる。これを積分すると

$$w = \frac{C_1}{4i} e^{i4x} + C_2$$

なので,

$$y = we^{-i2x} = \frac{C_1}{4i} e^{i2x} + C_2 e^{-i2x}$$

となる。$\dfrac{C_1}{4i}$ を改めて C_1 におき直すと

$$y = C_1 e^{i2x} + C_2 e^{-i2x}$$

が得られる。

(8)　与えられた微分方程式を演算子を用いて書き直すと

$$(D^2 - 2D + 1)y = 0$$

となる。$(D-1)(D-1) = D^2 - 2D + 1$ なので微分方程式は

$$(D-1)(D-1)y = 0$$

となる。$v=(D-1)y$ とおき，$D-1=e^{x}De^{-x}$ を用いて変形すると

$$e^{x}De^{-x}v=0$$

となる。$u=e^{-x}v$ とおくと，$Du=0$ を得る。これを積分すると $u=C_1$ (定数) となる。$e^{-x}v=u=C_1$ より

$$v=C_1e^{x}$$

を得る。$v=(D-1)y=e^{x}De^{-x}y$ より $w=e^{-x}y$ とおくと $e^{x}Dw=C_1e^{x}$ なので

$$Dw=C_1$$

となる。これを積分すると

$$w=C_1x+C_2$$

なので,

$$y=we^{x}=C_1xe^{x}+C_2e^{x}$$

となる。

(9) 与えられた微分方程式を演算子を用いて書き直すと

$$(D^2+4D+4)y=0$$

となる。$(D+2)(D+2)=D^2+4D+4$ なので微分方程式は

$$(D+2)(D+2)y=0$$

となる。$v=(D+2)y$ とおき，$D+2=e^{-2x}De^{2x}$ を用いて変形すると

$$e^{-2x}De^{2x}v=0$$

となる。$u=e^{2x}v$ とおくと，$Du=0$ を得る。これを積分すると $u=C_1$ (定数) となる。$e^{2x}v=u=C_1$ より

$$v=C_1e^{-2x}$$

を得る。$v=(D+2)y=e^{-2x}De^{2x}y$ より $w=e^{2x}y$ とおくと $e^{-2x}Dw=C_1e^{-2x}$ なので

$$Dw=C_1$$

となる。これを積分すると

$$w=C_1x+C_2$$

なので,

$$y=we^{-2x}=C_1xe^{-2x}+C_2e^{-2x}$$

となる。

演習問題 4.4　次の微分方程式を実数値関数の範囲で解け。

(1) $y''+y=0$　　(2) $y''+\omega^2y=0\quad(0\neq\omega\in\mathbb{R})$

(3) $y''-y'+y=0$　　(4) $y''-2y'+2y=0$

(1)　演習問題 4.3 (6) より複素数値関数の範囲では

$$y = C_1 e^{ix} + C_2 e^{-ix}$$

となる解が見つかっている。この中から実数値関数を探す。$C_1 = \frac{1}{2}$, $C_2 = \frac{1}{2}$ とすると $y_1 = \cos x$ が見つかる。$C_1 = \frac{1}{2i}$, $C_2 = -\frac{1}{2i}$ とすると $y_2 = \sin x$ が見つかる。

C_1, C_2 を実数とするとき

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$$

は与えられた微分方程式の解になっている。これ以外に解がないかどうかを調べる。今まで，そのようなことをしていなかったのは演算子法で解をすべて見つけていたからである。この問題の場合，$\cos x$ および $\sin x$ はたまたま見つけた解なので，厳密には他に解がないかのチェックが必要になる。このチェックには定理 6.2 を使う。

y_0 をこの微分方程式の任意の解とする。$y_0(0) = a_0$, $y_0'(0) = a_1$ とする。(2 階の微分方程式なので初期条件を 2 つ与えた。) $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$ がこの初期条件を満たすとき，$y' = -C_1 \sin x + C_2 \cos x$ なので，$a_0 = y(0) = C_1 \cos 0 + C_2 \sin 0 = C_1$，$a_1 = y'(0) = -C_1 \sin 0 + C_2 \cos 0 = C_2$ となる。逆に $y = a_0 \cos x + a_1 \sin x$ は $y(0) = a_0$, $y'(0) = a_1$ を満たす。y および y_0 はともに微分方程式の解であり，$y(0) = y_0(0)$ かつ $y'(0) = y_0'(0)$ が成立するので $y_0 = y$ すなわち

$$y_0 = a_0 \cos x + a_1 \sin x$$

が成立する。よって微分方程式の解はすべて

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$$

の形をしていることが分かる。

(2)　演習問題 4.3 と同様に解くと，複素数値関数の範囲では

$$y = C_1 e^{i\omega x} + C_2 e^{-i\omega x}$$

となる。この中から実数値関数を探す。$C_1 = \frac{1}{2}$, $C_2 = \frac{1}{2}$ とすると $y_1 = \cos \omega x$ が見つかる。$C_1 = \frac{1}{2i}$, $C_2 = -\frac{1}{2i}$ とすると $y_2 = \sin \omega x$ が見つかる。

C_1, C_2 を実数とするとき

$$y = C_1 \cos \omega x + C_2 \sin \omega x$$

は与えられた微分方程式の解になっている。これ以外に解がないかどうかを調べる。

y_0 をこの微分方程式の任意の解とする。$y_0(0) = a_0$，$y_0'(0) = a_1$ とする。$y = C_1 \cos \omega x + C_2 \sin \omega x$ がこの初期条件を満たすとき，$y' = -C_1 \omega \sin \omega x + C_2 \omega \cos \omega x$ なので，$a_0 = y(0) = C_1 \cos \omega 0 + C_2 \sin \omega 0 = C_1$，$a_1 = y'(0) = -C_1 \omega \sin \omega 0 + C_2 \omega \cos \omega 0 = C_2 \omega$ となる。逆に $y = a_0 \cos \omega x + \frac{a_1}{\omega} \sin \omega x$ は $y(0) = a_0$, $y'(0) = a_1$ を満たす。y および y_0 はともに微分方程式の解であり，$y(0) = y_0(0)$ かつ $y'(0) = y_0'(0)$ が成立するので $y_0 = y$ すなわち

$$y_0 = a_0 \cos \omega x + \frac{a_1}{\omega} \sin \omega x$$

が成立する。よって微分方程式の解はすべて

$$y = C_1 \cos \omega x + C_2 \sin \omega x$$

の形をしていることが分かる。

(3) 演習問題 4.3 と同様に解くと，複素数値関数の範囲では

$$y = C_1 \exp\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}x\right) + C_2 \exp\left(\frac{1-i\sqrt{3}}{2}x\right)$$

となる。この中から実数値関数を探す。$C_1 = \frac{1}{2}, C_2 = \frac{1}{2}$ とすると $y_1 = \exp\left(\frac{1}{2}x\right)\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x$ が見つかる。$C_1 = \frac{1}{2i}, C_2 = -\frac{1}{2i}$ とすると $y_2 = \exp\left(\frac{1}{2}x\right)\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x$ が見つかる。

C_1, C_2 を実数とするとき

$$y = C_1 \exp\left(\frac{1}{2}x\right)\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + C_2 \exp\left(\frac{1}{2}x\right)\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x$$

は与えられた微分方程式の解になっている。これ以外に解がないかどうかを調べる。

y_0 をこの微分方程式の任意の解とする。$y_0(0) = a_0, y_0'(0) = a_1$ とする。

$$y = C_1 \exp\left(\frac{1}{2}x\right)\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + C_2 \exp\left(\frac{1}{2}x\right)\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x$$

がこの初期条件を満たすとき，

$$\begin{aligned} y' &= \frac{1}{2}C_1 \exp\left(\frac{1}{2}x\right)\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}C_1 \exp\left(\frac{1}{2}x\right)\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x \\ &\quad + \frac{1}{2}C_2 \exp\left(\frac{1}{2}x\right)\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}C_2 \exp\left(\frac{1}{2}x\right)\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x \end{aligned}$$

なので，$a_0 = y(0) = C_1$，$a_1 = y'(0) = \frac{C_1}{2} + \frac{\sqrt{3}C_2}{2}$ となる。逆に

$$y = a_0 \exp\left(\frac{1}{2}x\right)\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{2a_1 - a_0}{\sqrt{3}} \exp\left(\frac{1}{2}x\right)\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x$$

は $y(0) = a_0, y'(0) = a_1$ を満たす。y および y_0 はともに微分方程式の解であり，$y(0) = y_0(0)$ かつ $y'(0) = y_0'(0)$ が成立するので $y_0 = y$ すなわち

$$y_0 = a_0 \exp\left(\frac{1}{2}x\right)\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{2a_1 - a_0}{\sqrt{3}} \exp\left(\frac{1}{2}x\right)\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x$$

が成立する。よって微分方程式の解はすべて

$$y = C_1 \exp\left(\frac{1}{2}x\right)\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + C_2 \exp\left(\frac{1}{2}x\right)\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x$$

の形をしていることが分かる。

(4) 演習問題 4.3 と同様に解くと，複素数値関数の範囲では

$$y = C_1 \exp\left((1+i)x\right) + C_2 \exp\left((1-i)x\right)$$

となる。この中から実数値関数を探す。$C_1 = \dfrac{1}{2}$, $C_2 = \dfrac{1}{2}$ とすると $y_1 = e^x \cos x$ が見つかる。$C_1 = \dfrac{1}{2i}$, $C_2 = -\dfrac{1}{2i}$ とすると $y_2 = e^x \sin x$ が見つかる。

C_1, C_2 を実数とするとき

$$y = C_1 e^x \cos x + C_2 e^x \sin x$$

は与えられた微分方程式の解になっている。これ以外に解がないかどうかを調べる。

y_0 をこの微分方程式の任意の解とする。$y_0(0) = a_0$, $y_0'(0) = a_1$ とする。

$$y = C_1 e^x \cos x + C_2 e^x \sin x$$

がこの初期条件を満たすとき，

$$y' = C_1 e^x \cos x - C_1 e^x \sin x + C_2 e^x \sin x + C_2 e^x \cos x$$

なので，$a_0 = y(0) = C_1$，$a_1 = y'(0) = C_1 + C_2$ となる。逆に

$$y = a_0 e^x \cos x + (a_1 - a_0) e^x \sin x$$

は $y(0) = a_0$, $y'(0) = a_1$ を満たす。y および y_0 はともに微分方程式の解であり，$y(0) = y_0(0)$ かつ $y'(0) = y_0'(0)$ が成立するので $y_0 = y$ すなわち

$$y_0 = a_0 e^x \cos x + (a_1 - a_0) e^x \sin x$$

が成立する。よって微分方程式の解はすべて

$$y = C_1 e^x \cos x + C_2 e^x \sin x$$

の形をしていることが分かる。

演習問題 *4.5　次が成立することを示せ。

2 次式 $\varphi(t) = t^2 + at + b$ に対し方程式 $\varphi(t) = 0$ は解 α, β を持つとする。微分方程式

$$\left(D^2 + aD + b\right) y = 0$$

を考える。この微分方程式の一般解は $\alpha \neq \beta$ のとき

$$y = C_1 e^{\alpha x} + C_2 e^{\beta x}$$

であり，$\alpha = \beta$ のとき

$$y = C_1 x e^{\alpha x} + C_2 e^{\alpha x}$$

である。

$\varphi(t) = 0$ の 2 解を α, β とすると，

$$D^2 + aD + b = (D - \alpha)(D - \beta)$$

と書けるので微分方程式を演算子を用いて書き直すと $(D - \alpha)(D + \beta)y = 0$ となる。$v = (D - \beta)y$ とおき，$D - \alpha = e^{\alpha x} D e^{-\alpha x}$ を用いて変形すると

$$e^{\alpha x} D e^{-\alpha x} v = 0$$

となる。$u = e^{-\alpha x}v$ とおくと，$Du = 0$ を得る。これを積分すると $u = C_1$ (定数) となる。$e^{-\alpha x}v = u = C_1$ より

$$v = C_1 e^{\alpha x}$$

を得る。$v = (D - \beta)y = e^{\beta x}De^{-\beta x}y$ より $w = e^{-\beta x}y$ とおくと $e^{\beta x}Dw = C_1 e^{\alpha x}$ なので

$$Dw = C_1 e^{(\alpha - \beta)x}$$

となる。

ここで場合分けが必要になる。最初に $\alpha \neq \beta$ のとき，これを積分すると

$$w = \frac{C_1}{\alpha - \beta} e^{(\alpha - \beta)x} + C_2$$

なので，

$$y = we^{\beta x} = \frac{C_1}{\alpha - \beta} e^{\alpha x} + C_2 e^{\beta x}$$

となる。$\dfrac{C_1}{\alpha - \beta}$ を改めて C_1 におき直すと

$$y = C_1 e^{\alpha x} + C_2 e^{\beta x}$$

が得られる。

$\alpha = \beta$ の場合は

$$Dw = C_1 e^{(\alpha - \alpha)x} = C_1$$

となる。積分すると

$$w = C_1 x + C_2$$

となるので，

$$y = we^{\alpha x} = C_1 x e^{\alpha x} + C_2 e^{\alpha x}$$

となる。

演習問題 *4.6　　次が成立することを示せ。

$\varphi(t) = t^2 + at + b = 0$ は実数解を持たないとする。$\varphi(t) = 0$ の複素解を $\lambda_1 \pm i\lambda_2$ とする。微分方程式

$$(D^2 + aD + b)y = 0$$

の実数値関数としての一般解は

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} \cos \lambda_2 x + C_2 e^{\lambda_1 x} \sin \lambda_2 x$$

である。ここで C_1, C_2 は実数である任意定数。

演習問題 6.5 よりこの微分方程式の解関数は複素数値関数としては

$$y = C_1 \exp\left((\lambda_1 + i\lambda_2)x\right) + C_2 \exp\left((\lambda_1 - i\lambda_2)x\right)$$

となっている。この中から実数値関数を探す。$C_1 = \dfrac{1}{2}, C_2 = \dfrac{1}{2}$ とすると $y_1 = \exp\left(\lambda_1 x\right) \cos \lambda_2 x$ が見つかる。$C_1 = \dfrac{1}{2i}, C_2 = -\dfrac{1}{2i}$ とすると $y_2 = \exp\left(\lambda_1 x\right) \sin \lambda_2 x$ が見つかる。

C_1, C_2 を実数とするとき

$$y = C_1 \exp(\lambda_1 x) \cos \lambda_2 x + C_2 \exp(\lambda_1 x) \sin \lambda_2 x$$

は与えられた微分方程式の解になっている。これ以外に解がないかどうかを調べる。

y_0 をこの微分方程式の任意の解とする。$y_0(0) = a_0$, $y_0'(0) = a_1$ とする。

$$y = C_1 \exp(\lambda_1 x) \cos \lambda_2 x + C_2 \exp(\lambda_1 x) \sin \lambda_2 x$$

がこの初期条件を満たすとき，

$$\begin{aligned} y' &= C_1\lambda_1 \exp(\lambda_1 x) \cos \lambda_2 x - C_1\lambda_2 \exp(\lambda_1 x) \sin \lambda_2 x \\ &\quad + C_2\lambda_1 \exp(\lambda_1 x) \sin \lambda_2 x + C_2\lambda_2 \exp(\lambda_2 x) \cos \lambda_2 x \end{aligned}$$

なので，$a_0 = y(0) = C_1$，$a_1 = y'(0) = C_1\lambda_1 + C_2\lambda_2$ となる。逆に

$$y = a_0 \exp(\lambda_1 x) \cos \lambda_2 x + \frac{a_1 - a_0\lambda_1}{\lambda_2} \exp(\lambda_1 x) \sin \lambda_2 x$$

は $y(0) = a_0$, $y'(0) = a_1$ を満たす。y および y_0 はともに微分方程式の解であり，$y(0) = y_0(0)$ かつ $y'(0) = y_0'(0)$ が成立するので $y_0 = y$ すなわち

$$\begin{aligned} y' &= C_1\lambda_1 \exp(\lambda_1 x) \cos \lambda_2 x - C_1\lambda_2 \exp(\lambda_1 x) \sin \lambda_2 x \\ &\quad + C_2\lambda_1 \exp(\lambda_1 x) \sin \lambda_2 x + C_2\lambda_2 \exp(\lambda_2 x) \cos \lambda_2 x \end{aligned}$$

が成立する。よって微分方程式の実数値関数の解はすべて

$$y = C_1 \exp(\lambda_1 x) \cos \lambda_2 x + C_2 \exp(\lambda_1 x) \sin \lambda_2 x$$

の形をしていることが分かる。

演習問題 4.7　次の微分方程式を解け。

(1) $\dfrac{dy}{dx} - 3y = e^{2x}$

(2) $\dfrac{dy}{dx} + 2y = \sin x$

(3) $\dfrac{dy}{dx} + 3y = x^2 + x$

(4) $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 2\dfrac{dy}{dx} - 3y = x + 4$

(5) $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 2\dfrac{dy}{dx} - 3y = \sin x$

(6) $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 2\dfrac{dy}{dx} - 3y = e^{2x}$

(1)　微分方程式を演算子法を使って書き直すと

$$(D-3)y = e^{2x}$$

となる。$D - 3 = e^{3x} D e^{-3x}$ なので $u = e^{-3x}y$ とおくと $e^{3x}Du = e^{2x}$ なので

$$Du = e^{-x}$$

となる。積分すると

$$u = -e^{-x} + C$$

となる。よって

$$y = e^{3x}u = Ce^{3x} - e^{2x}$$

となる。

(2) 微分方程式を演算子法を使って書き直すと

$$(D+2)y = \sin x$$

となる。$D+2 = e^{-2x}De^{2x}$ なので $u = e^{2x}y$ とおくと $e^{-2x}Du = \sin x$ なので

$$Du = e^{2x}\sin x$$

となる。この積分は解析学 I ですでに学んでいるものである。復習も兼ねて一応解答を書いておく (部分積分法)。

$$\begin{aligned}
I &= \int e^{2x}\sin x dx \\
&= \int \left(\frac{1}{2}e^{2x}\right)' \sin x dx \\
&= \frac{1}{2}e^{2x}\sin x - \int \frac{1}{2}e^{2x}\cos x dx \\
&= \frac{1}{2}e^{2x}\sin x - \frac{1}{2}\int \left(\frac{1}{2}e^{2x}\right)' \cos x dx \\
&= \frac{1}{2}e^{2x}\sin x - \frac{1}{4}e^{2x}\cos x - \frac{1}{4}\int \frac{1}{2}e^{2x}\sin x dx \\
&= \frac{1}{2}e^{2x}\sin x - \frac{1}{4}e^{2x}\cos x - \frac{1}{4}I
\end{aligned}$$

より

$$I = \frac{2}{5}e^{2x}\sin x - \frac{1}{5}e^{2x}\cos x$$

を得る。よって

$$u = \frac{2}{5}e^{2x}\sin x - \frac{1}{5}e^{2x}\cos x + C$$

となり,

$$y = e^{-2x}u = Ce^{-2x} + \frac{2}{5}\sin x - \frac{1}{5}\cos x$$

となる。

(3) 微分方程式を演算子法を使って書き直すと

$$(D+3)y = x^2 + x$$

となる。$D+3 = e^{-3x}De^{3x}$ なので $u = e^{3x}y$ とおくと $e^{-3x}Du = x^2 + x$ なので

$$Du = e^{3x}(x^2 + x)$$

となる。この積分は解析学 I ですでに学んでいるものである。復習も兼ねて一応解答を書いておく (部分積分法)。

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int e^{3x}x dx = \int \left(\frac{1}{3}e^{3x}\right)' x dx \\
&= \frac{1}{3}e^{3x}x - \int \frac{1}{3}e^{3x}dx \\
&= \frac{1}{3}e^{3x}x - \frac{1}{9}e^{3x}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
I_2 &= \int e^{3x}x^2dx = \int \left(\frac{1}{3}e^{3x}\right)' x^2dx \\
&= \frac{1}{3}e^{3x}x^2 - \int \frac{1}{3}e^{3x}2xdx \\
&= \frac{1}{3}e^{3x}x^2 - \frac{2}{3}I_1 \\
&= \frac{1}{3}e^{3x}x^2 - \frac{2}{9}e^{3x}x + \frac{2}{27}e^{3x}
\end{aligned}
$$

より

$$I = I_1 + I_2 = \frac{1}{3}x^2e^{3x} + \frac{1}{9}xe^{3x} - \frac{1}{27}e^{3x}$$

を得る。よって

$$u = \frac{1}{3}x^2e^{3x} + \frac{1}{9}xe^{3x} - \frac{1}{27}e^{3x} + C$$

となり，

$$y = e^{-3x}u = Ce^{-3x} + \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{9}x - \frac{1}{27}$$

となる。

(4) 与えられた微分方程式を演算子を用いて書き直すと

$$(D^2 - 2D - 3)y = x + 4$$

となる。$(D-3)(D+1) = D^2 - 2D - 3$ なので微分方程式は

$$(D-3)(D+1)y = x + 4$$

となる。$v = (D+1)y$ とおき，$D - 3 = e^{3x}De^{-3x}$ を用いて変形すると

$$e^{3x}De^{-3x}v = x + 4$$

となる。$u = e^{-3x}v$ とおくと，$Du = (x+4)e^{-3x}$ を得る。これを積分すると

$$u = -\left(\frac{x}{3} + \frac{13}{9}\right)e^{-3x} + C_1$$

となる。よって

$$v = C_1e^{3x} - \left(\frac{x}{3} + \frac{13}{9}\right)$$

を得る。$v = (D+1)y = e^{-x}De^xy$ より $w = e^xy$ とおくと $e^{-x}Dw = C_1e^{3x} - \left(\frac{x}{3} + \frac{13}{9}\right)$ なので

$$Dw = C_1e^{4x} - \left(\frac{x}{3} + \frac{13}{9}\right)e^x$$

となる。これを積分すると

$$w = \frac{C_1}{4}e^{4x} + C_2 - \left(\frac{x}{3} + \frac{10}{9}\right)e^x$$

なので,

$$y = we^{-x} = \frac{C_1}{4}e^{3x} + C_2e^{-x} - \left(\frac{x}{3} + \frac{10}{9}\right)$$

となる。$\dfrac{C_1}{4}$ を改めて C_1 におき直すと

$$y = C_1e^{3x} + C_2e^{-x} - \left(\frac{x}{3} + \frac{10}{9}\right)$$

が得られる。

(5)　与えられた微分方程式を演算子を用いて書き直すと

$$(D^2 - 2D - 3)y = \sin x$$

となる。$(D-3)(D+1) = D^2 - 2D - 3$ なので微分方程式は

$$(D-3)(D+1)y = \sin x$$

となる。$v = (D+1)y$ とおき，$D - 3 = e^{3x}De^{-3x}$ を用いて変形すると

$$e^{3x}De^{-3x}v = \sin x$$

となる。$u = e^{-3x}v$ とおくと，$Du = e^{-3x}\sin x$ を得る。これを積分すると

$$u = -\left(\frac{3}{10}\sin x + \frac{1}{10}\cos x\right)e^{-3x} + C_1$$

となる。よって

$$v = C_1e^{3x} - \left(\frac{3}{10}\sin x + \frac{1}{10}\cos x\right)$$

を得る。$v = (D+1)y = e^{-x}De^{x}y$ より $w = e^{x}y$ とおくと $e^{-x}Dw = C_1e^{3x} - \left(\dfrac{3}{10}\sin x + \dfrac{1}{10}\cos x\right)$ なので

$$Dw = C_1e^{4x} - \left(\frac{3}{10}\sin x + \frac{1}{10}\cos x\right)e^{x}$$

となる。これを積分すると

$$w = \frac{C_1}{4}e^{4x} + C_2 - \left(\frac{1}{5}\sin x - \frac{1}{10}\cos x\right)e^{x}$$

なので,

$$y = we^{-x} = \frac{C_1}{4}e^{3x} + C_2e^{-x} - \frac{1}{5}\sin x + \frac{1}{10}\cos x$$

となる。$\dfrac{C_1}{4}$ を改めて C_1 におき直すと

$$y = C_1e^{3x} + C_2e^{-x} - \frac{1}{5}\sin x + \frac{1}{10}\cos x$$

が得られる。

(6)　与えられた微分方程式を演算子を用いて書き直すと

$$(D^2 - 2D - 3)y = e^{2x}$$

となる。$(D-3)(D+1) = D^2 - 2D - 3$ なので微分方程式は

$$(D-3)(D+1)y = e^{2x}$$

となる。$v = (D+1)y$ とおき，$D - 3 = e^{3x}De^{-3x}$ を用いて変形すると

$$e^{3x}De^{-3x}v = e^{2x}$$

となる。$u = e^{-3x}v$ とおくと，$Du = e^{-x}$ を得る。これを積分すると

$$u = -e^{-x} + C_1$$

となる。よって

$$v = e^{3x}u = C_1e^{3x} - e^{2x}$$

を得る。$v = (D+1)y = e^{-x}De^{x}y$ より $w = e^{x}y$ とおくと $e^{-x}Dw = C_1e^{3x} - e^{2x}$ なので

$$Dw = C_1e^{4x} - e^{3x}$$

となる。これを積分すると

$$w = \frac{C_1}{4}e^{4x} + C_2 - \frac{1}{3}e^{3x}$$

なので，

$$y = we^{-x} = \frac{C_1}{4}e^{3x} + C_2e^{-x} - \frac{1}{3}e^{2x}$$

となる。$\dfrac{C_1}{4}$ を改めて C_1 におき直すと

$$y = C_1e^{3x} + C_2e^{-x} - \frac{1}{3}e^{2x}$$

が得られる。