

2.4 合成関数の導関数

合成関数の導関数は次の様になる。1 変数の場合と異なるので特に注意が必要である。

定理 2.11 $z = f(x, y), x = x(t), y = y(t)$ の時, z を t で微分した導関数は次で与えられる。

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dt}$$

次の形の様に行列で考えた方が分かりやすいかもしれない。

定義 2.12 2 変数関数の組 $x = x(s, t), y = y(s, t)$ に対し

$$\frac{D(x, y)}{D(s, t)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial x}{\partial t} \\ \frac{\partial y}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial t} \end{pmatrix}$$

をこの関数 (の組) のヤコビ行列といい, この行列の行列式を

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(s, t)} = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial x}{\partial t} \\ \frac{\partial y}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial t} \end{pmatrix}$$

で表わし, ヤコビアン (ヤコビ行列式) という。

定理 2.13 2 つの関数の組 $x = x(u, v), y = y(u, v)$ と $u = u(s, t), v = v(s, t)$ に対し

$$\frac{D(x, y)}{D(s, t)} = \frac{D(x, y)}{D(u, v)} \frac{D(u, v)}{D(s, t)}$$

が成立する。

特に逆関数に関しては

$$\frac{D(u, v)}{D(x, y)} = \left(\frac{D(x, y)}{D(u, v)} \right)^{-1}$$

となる。

演習問題 2.4 次の場合に $\frac{D(x, y)}{D(u, v)}$ 及び $\frac{D(u, v)}{D(x, y)}$ を求めよ。

- | | |
|----------------------------------|------------------------------|
| (1) $x = v^2, y = u^2$ | (2) $x = u^2 - v^2, y = 2uv$ |
| (3) $x = u \cos v, y = u \sin v$ | (4) $x = u, y = u + v$ |

演習問題 2.5 次の関数に対し $\frac{\partial z}{\partial s}, \frac{\partial z}{\partial t}, \frac{\partial^2 z}{\partial s^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial s \partial t}$ を求めよ。

- | | |
|----------------------------------------|---------------------------------------------|
| (1) $z = x + y^2, s = x + y, t = xy$ | (2) $z = x + y, s = x^2 + y^2, t = x^2 y^2$ |
| (3) $z = x + y, s = x^2 + y^2, t = xy$ | (4) $z = x + y, s = x^2 - y^2, t = 2xy$ |
| (5) $z = xy, s = x, t = x + y$ | (6) $z = xy, s = x \cos y, t = x \sin y$ |

演習問題 2.6 $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$ とする (2次元の極座標表示)。ヤコビ行列 $\frac{D(x,y)}{D(r,\theta)}$ および

ヤコビアン $\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}$ を計算し, 関数 $z = f(x,y)$ に対し次を示せ。

$$(1) \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2$$

$$(2) \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2}$$

演習問題 2.7

(1) $x = u \cos \alpha - v \sin \alpha, y = u \sin \alpha + v \cos \alpha$ (α は定数) のとき次を示せ。

$$1) z_x^2 + z_y^2 = z_u^2 + z_v^2$$

$$2) z_{xx} + z_{yy} = z_{uu} + z_{vv}$$

(2) $x + y = e^{u+v}, x - y = e^{u-v}$ に対し $z_{xx} - z_{yy} = e^{-2u}(z_{uu} - z_{vv})$ が成立することを示せ。

(3) $x + y = u, y = uv$ ならば $xz_{xx} + yz_{xy} + z_x = uz_{uu} - vz_{uv} + z_u$ となる事を示せ。

2.5 3変数関数の微分

今まで2変数関数の微分について学んだ。ここでは3変数関数について見る。2変数関数の場合とほとんど平行に議論が進む事が確認出来る。

定義 2.14 関数 $y = f(x_1, x_2, x_3)$ が $(x_1, x_2, x_3) = (a_1, a_2, a_3)$ で x_1 に関して偏微分可能とは

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a_1 + h, a_2, a_3) - f(a_1, a_2, a_3)}{h}$$

が収束する事を言う。 x_2, x_3 にかんしても同様に定義できる。

x_1, x_2 及び x_3 に関して偏微分可能の時, 単に偏微分可能と言う。各点で偏微分可能の時1変数と同じ様に導関数を考える事ができる。これらを x_1 に関する (または x_2, x_3 に関する) 偏導関数と言う。 x_1 に関する偏導関数は

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} \quad \frac{\partial y}{\partial x_1} \quad f_{x_1} \quad z_{x_1}$$

等書かれる。

3変数関数の場合全微分可能性は幾何的には「接空間の存在」を意味する。

定義 2.15 $y = f(x_1, x_2, x_3)$ は点 (a_1, a_2, a_3) のまわりで定義されていて, (a_1, a_2, a_3) で微分可能とする。

$$\varepsilon(h_1, h_2, h_3) =$$

$$\frac{f(a_1 + h_1, a_2 + h_2, a_3 + h_3) - f(a_1, a_2, a_3) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1, a_2, a_3)h_1 - \frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1, a_2, a_3)h_2 - \frac{\partial f}{\partial x_3}(a_1, a_2, a_3)h_3}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2 + h_3^2}}$$

とおく。 $f(x_1, x_2, x_3)$ が (a_1, a_2, a_3) で全微分可能とは

$$\lim_{(h_1, h_2, h_3) \rightarrow (0,0,0)} \varepsilon(h_1, h_2, h_3) = 0$$

となる時をいう。

合成関数に関しても 2 変数と同様の結果が成立する。

定理 2.16 $y = f(x_1, x_2, x_3)$, $x_1 = x_1(t)$, $x_2 = x_2(t)$, $x_3 = x_3(t)$ のとき

$$\frac{dy}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x_1} \frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial z}{\partial x_2} \frac{dx_2}{dt} + \frac{\partial z}{\partial x_3} \frac{dx_3}{dt}$$

定義 2.17 3 変数関数 3 個の組 $x_1 = x_1(t_1, t_2, t_3)$, $x_2 = x_2(t_1, t_2, t_3)$, $x_3 = x_3(t_1, t_2, t_3)$ に対し

$$\frac{D(x_1, x_2, x_3)}{D(t_1, t_2, t_3)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial t_1} & \frac{\partial x_1}{\partial t_2} & \frac{\partial x_1}{\partial t_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial t_1} & \frac{\partial x_2}{\partial t_2} & \frac{\partial x_2}{\partial t_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial t_1} & \frac{\partial x_3}{\partial t_2} & \frac{\partial x_3}{\partial t_3} \end{pmatrix}$$

をこの関数 (の組) のヤコビ行列という。この行列の行列式を

$$\frac{\partial(x_1, x_2, x_3)}{\partial(t_1, t_2, t_3)} = \det \left(\frac{D(x_1, x_2, x_3)}{D(t_1, t_2, t_3)} \right)$$

で表し, ヤコビアンという。

定理 2.18 3 つの関数の組 $x_1 = x_1(u_1, u_2, u_3)$, $x_2 = x_2(u_1, u_2, u_3)$, $x_3 = x_3(u_1, u_2, u_3)$ と $u_1 = u_1(t_1, t_2, t_3)$, $u_2 = u_2(t_1, t_2, t_3)$, $u_3 = u_3(t_1, t_2, t_3)$ に対し

$$\frac{D(x_1, x_2, x_3)}{D(t_1, t_2, t_3)} = \frac{D(x_1, x_2, x_3)}{D(u_1, u_2, u_3)} \frac{D(u_1, u_2, u_3)}{D(t_1, t_2, t_3)}$$

が成立する。特に逆関数に関しては

$$\frac{D(u_1, u_2, u_3)}{D(x_1, x_2, x_3)} = \left(\frac{D(x_1, x_2, x_3)}{D(u_1, u_2, u_3)} \right)^{-1}$$

となる。

演習問題 2.8 次の関数の偏導関数を求めよ。

- (1) $w = f(x, y, z) = x^2 y^3 z^4$ (2) $w = xyz \sin(x^2 + y^2 + z^2)$
 (3) $e^{x^2 + y^3 + z^4}$ (4) $x^2 y^3 \log(x^2 + y^3 + z^4)$

演習問題 2.9 次の場合に $\frac{D(x, y, z)}{D(u, v, w)}$ 及び $\frac{D(u, v, w)}{D(x, y, z)}$ を求めよ。

- (1) $x = v^2, y = w^2, z = u^2$ (2) $x = u^2 - v^2 + w^2, y = 2uv, z = 2uw$
 (3) $x = u \cos v, y = u \sin v, z = u + w$ (4) $x = u, y = u + v, z = u + v + w$

演習問題 2.10 次の関数に対し $\frac{\partial w}{\partial s}, \frac{\partial w}{\partial t}, \frac{\partial w}{\partial u}, \frac{\partial^2 w}{\partial s^2}, \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \frac{\partial^2 w}{\partial u^2}, \frac{\partial^2 w}{\partial s \partial t}$ を求めよ。

- (1) $w = x^3 + y^3 + z^3, x + y + z = s, xy + yz + zx = t, xyz = u$
 (2) $w = x + y + z, x^2 + y^2 + z^2 = s, xyz = t, xy + yz + zx = u$

演習問題 2.11 $x = r \sin \theta \cos \varphi$, $y = r \sin \theta \sin \varphi$, $z = r \cos \theta$ とする (3次元の極座標表示)。関数 $w = f(x, y, z)$ に対し次を示せ。

(1) ヤコビアン $\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, \varphi)}$ を計算せよ。

$$(2) \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2 = \left(\frac{\partial w}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta}\right)^2 + \left(\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial w}{\partial \varphi}\right)^2$$

$$(3) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial w}{\partial \varphi}$$