解析学 I 要綱 #7

2007–11–22　　河野

2.6 高階偏導関数とテーラーの定理

関数 $z = f(x, y)$ の導関数 f_x, f_y が偏微分可能のとき更に導関数を考える事ができる。f_x の x に関する導関数 $(f_x)_x$ および y に関する導関数 $(f_x)_y$ をそれぞれ

$$f_{xx}, \quad f_{xy}$$

と書く。また f_y の導関数も同様に定義できる。これらを 2 階の偏導関数と呼ぶ。$\dfrac{\partial z}{\partial x}$ の表し方で言うと，$\dfrac{\partial z}{\partial x}$ を x で微分した関数は $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)$ から $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ と書く。同様に $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ を y で微分した関数は $\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)$ から $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ と書く。$\dfrac{\partial z}{\partial y}$ を x で微分した関数は $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)$ から $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ 表す。$\dfrac{\partial z}{\partial y}$ を y で微分した関数は $\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)$ から $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ と表す。3 階以上の偏導関数も同様に定義される。この節では関数は**何回でも微分できる**ことを仮定し，それを特に断らないことにする。

$z = f(x, y)$ の 2 階の偏導関数は 4 つあり

$$z_{xx}, \quad z_{xy}, \quad z_{yx}, \quad z_{yy}$$

あるいはライプニッツ流に書くと

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

である。$z = f(x, y)$ の 3 階の偏導関数は 8 つあり

$$z_{xxx}, \quad z_{xxy}, \quad z_{xyx}, \quad z_{xyy}, \quad z_{yxx}, \quad z_{yxy}, \quad z_{yyx}, \quad z_{yyy}$$

あるいはライプニッツ流に書くと

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}, \quad \frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x^2}, \quad \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y \partial x}, \quad \frac{\partial^3 z}{\partial y^2 \partial x}, \quad \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}, \quad \frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}, \quad \frac{\partial^3 z}{\partial y^3}$$

である。

f_{xy} は f を最初は x で微分し次に y で微分したものである。f_{yx} は f を最初は y で微分し次に x で微分したものであり，この 2 つは一般に違うものである。しかしある条件の元では一致する。

定理 2.19 [**シュワルツの定理**] 点 (a, b) の近傍で，f_x, f_y, f_{xy} が存在して，f_{xy} が (a, b) で連続ならば，f_{yx} も存在して $f_{xy}(a, b) = f_{yx}(a, b)$ が成立する。

系 2.20 $f(x, y)$ が C^2 級 (2 階の偏導関数が存在して連続) ならば $f_{xy} = f_{yx}$ である。

このプリントも含め講義関連のプリントは http://math.cs.kitami-it.ac.jp/~kouno/kougi.html においてある。

関数 $f(x,y)$ が C^n 級 (n 階までの導関数が存在して連続) であれば n 階までの導関数は x,y で微分した回数が同じであればその順序によらず決る。

演習問題 2.12　上でのべた事を証明せよ。即ち系を仮定して次を示せ。
(1) $z=f(x,y)$ が C^3 級ならば

$$z_{xxy}=z_{xyx}=z_{yxx}, \quad z_{yyx}=z_{yxy}=z_{xyy}$$

が成立する。
(2) $z=f(x,y)$ が C^n 級ならば

$$z_{\cdots xy \cdots}=z_{\cdots yx \cdots}$$

が成立する。ただし $\cdots$ 部分は同じとし，微分は全部で n 回されるものとする。
(3) $z=f(x,y)$ が C^n 級ならば n 階の導関数は x,y で微分した回数が同じであればその順序によらず決る。

多変数のテーラーの定理を述べるために次の記号を導入する。この記号を使用しないと，定理を書き下すだけで結構な手間である。

定義 2.21 $\dfrac{\partial}{\partial x}$ を独立したものとして扱い $\dfrac{\partial}{\partial x}f$ は $\dfrac{\partial}{\partial x}$ が f に作用していると見なす。このとき形式的に $D=h\dfrac{\partial}{\partial x}+k\dfrac{\partial}{\partial y}$ と定義し，Df を $Df=h\dfrac{\partial}{\partial x}f+k\dfrac{\partial}{\partial y}f$ と定義する。また

$$D^2=\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^2=h^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}+2hk\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}+k^2\frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

と考える。一般に

$$D^n=\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^n=\sum_{r=0}^{n}{}_nC_r h^{n-r}k^r\frac{\partial^n}{\partial x^{n-r}\partial y^r}$$

と見る。

定理 2.22 [**テーラーの定理**]

$$\begin{aligned} f(x+h,y+k) &= f(x,y)+Df(x,y)+\cdots+\frac{1}{r!}D^rf(x,y)+\cdots+\frac{1}{(n-1)!}D^{n-1}f(x,y) \\ &\quad +\frac{1}{n!}D^nf(x+\theta h,+y+\theta k) \end{aligned}$$

となる θ $(0<\theta<1)$ が存在する。

$z=f(x,y)=x^2e^y$ に対し $(x,y)=(1,1)$ でテーラー定理を用いて展開して見よう。1 変数の定理の場合と同様に，定理の $\dfrac{1}{n!}D^nf(x+\theta h,+y+\theta k)$ の項を剰余項といい R_n で表す。ここでは剰余項を無視した近似を考える。最初に $n=2$ の場合を考える。$\dfrac{\partial f}{\partial x}=2xe^y$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}=x^2e^y$ なので $\dfrac{\partial f}{\partial x}(1,1)=2e$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}=e$ である。よって

$$f(1+h,1+k)\cong e+2eh+ek$$

である。これは関数 f を $(1,1)$ の周りで h,k に関する 1 次式で近似している式である。
$n=3$ の場合は

$$f(1+h,1+k) \cong e+2eh+ek+eh^2+2ehk+\frac{1}{2}ek^2$$

この式は 2 次式による近似になっている。n を大きくしていくと高い次数の式による近似になり，一般に近似が良くなるのは 1 変数の場合と同様である。
1 変数の場合と同様に 2 変数でも級数展開が考えられるがこの講義では取扱わない。

演習問題 2.13 次の関数を (a,b) において $n=3$ とし，剰余項を無視したテーラー展開を求めよ。
(1) $z=f(x,y)=(x-1)(y+2) \quad (a,b)=(0,0)$
(2) $z=f(x,y)=\dfrac{1}{1-2x+3y} \quad (a,b)=(0,0)$
(3) $z=f(x,y)=\sin(x+y) \quad (a,b)=\left(\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$

2.7 極値

ある点 (a,b) の周りで $f(a,b)$ の値が他の $f(x,y)$ より大きいとき**極大値**という。逆に他の値より小さいとき**極小値**という。正確に言うと，ある正数 δ が存在して，$0<\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}<\delta$ ならば $f(x,y)<f(a,b)$ が成立しているとき，$f(x,y)$ は (a,b) で極大といい，$f(a,b)$ を極大値という。極値の定義において $f(x,y)<f(a,b)$ を $f(x,y)\leqq f(a,b)$ に置き換えた概念を**広義の極大**といい，$f(a,b)$ を**広義の極大値**という。極小も同様に定義できる。極大値・極小値合わせて**極値**という。

関数 $z=f(x,y)$ が $f_x(a,b)=0$ かつ $f_y(a,b)=0$ を満たすとき，点 (a,b) を関数 $z=f(x,y)$ の**臨界点**と呼ぶ。1 変数関数と同様に $z=f(x,y)$ が点 (a,b) で (広義の) 極値をとれば，(a,b) が臨界点である事が分かる。即ち次が成立する。

命題 2.23 (a,b) で f が極値をとるならば，(a,b) は f の臨界点である。

この逆の「臨界点は極値」は一般に正しくない。極値を判定するため次を定義する。関数 $z=f(x,y)$ に対し

$$H(x,y)=f_{xx}(x,y)f_{yy}(x,y)-\bigl(f_{xy}(x,y)\bigr)^2$$

を $z=f(x,y)$ の**ヘッシャン**と呼ぶ。このとき次が成立する。

定理 2.24 (a,b) を関数 $z=f(x,y)$ の臨界点とするとき，次が成立する。

(1) $H(a,b)>0$ のとき $f(x,y)$ は (a,b) で極値をとる。

 1) $f_{xx}(a,b)>0$ のとき $f(a,b)$ は極少値である。

 2) $f_{xx}(a,b)<0$ のとき $f(a,b)$ は極大値である。

(2) $H(a,b)<0$ のとき極値でない。

(3) $H(a,b)=0$ のときはこれだけでは分らない。極値になる場合もならない場合もある。

例 2.25 $z = f(x,y) = x^4 + y^4 + 2x^2y^2 - 2y^2$ の極値を調べよう。最初に極値候補となる臨界点を求めよう。$z_x = 4x^3 + 4xy^2 = 0$, $z_y = 4y^3 + 4x^2y - 4y = 0$ の共通解が求めるものになる。この連立方程式を実数の範囲で解くと $(x,y) = (0,0),(0,1),(0,-1)$ を得る。

$z_{xx} = 12x^2 + 4y^2$, $z_{xy} = 8xy$, $z_{yy} = 12y^2 + 4x^2 - 4$ なので $H(0,\pm 1) = 32 > 0$, $H(0,0) = 0$ となる。定理 2.24 より，z は $(0,\pm 1)$ で極小である。$H(0,0) = 0$ なので $(0,0)$ の様子は定理 2.24 からは分からない。個別に調べなければならない。この場合は極値になりそうもないと当りをつけてそれを示す。

x–軸上に制限して考えると，$f(x,0) = x^4$ である。x–軸上では $(0,0)$ は極小，即ちいくらでも近くに $f(0,0)$ より大きな値を取る点が存在する。y–軸上に制限すると $f(0,y) = y^4 - 2y^2$ でこの 4 次関数は y–軸上では $(0,0)$ で極大，即ちいくらでも近くに $f(0,0)$ より小さい値を取る点が存在する。2 つを合わせると $(0,0)$ が極値でない事が分かる。

演習問題 2.14 次の関数の極大・極小を求めよ。

(1) $z = x^2 - xy + y^2 - 2x + 3y + 1$

(2) $z = x^2 - 5xy + 2y^2 + x - y - 3$

(3) $z = \dfrac{ax + by}{x^2 + y^2 + 1}$ $(a \neq 0, b \neq 0)$

(4) $z = e^{-(x^2+y^2)}(ax^2 + by^2)$ $(a > b > 0)$

2.8 陰関数

高校時代に次の様な議論をしたかもしれない。

$x^2 + y^2 = 1$ を x で微分すると $2x + 2y\dfrac{dy}{dx} = 0$ なので，$\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{x}{y}$ である。

式 $x^2 + y^2 = 1$ は明示的に関数を定義しているわけではないが，陰覆的に定義してると考える。この議論をきちんと述べよう。

定義 2.26 関数 $F(x,y)$ と $F(a,b) = 0$ となる点 (a,b) に対し，a の近傍(1)で定義された関数 $y = f(x)$ が存在して，1) 定義されている任意の x に対し $F(x, f(x)) = 0$，2) $b = f(a)$，が成立する時，F は点 (a,b) の近傍で，**陰関数** $y = f(x)$ を定めるという。またこの f を (a,b) の近傍で定まる陰関数という。

3 変数関数の場合は，関数 $F(x_1, x_2, y)$ と，$F(a_1, a_2, b) = 0$ となる点 (a_1, a_2, b) に対し，(a_1, a_2) の近傍(2)で定義された関数 $y = f(x_1, x_2)$ が存在して $F(x_1, x_2, f(x_1, x_2)) = 0$，$b = f(a_1, a_2)$ が成立する時，F は点 (a_1, a_2, b) において，**陰関数** $y = f(x_1, x_2)$ を定めるという。

定理 2.27 $F(x,y)$ に対し $F(a,b) = 0$，$F_y(a,b) \neq 0$ ならば a の近傍で陰関数 $y = f(x)$ が存在する。この時，F が C^r 級なら f も C^r 級。$\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{F_x}{F_y}$ である。

$F(x_1, x_2, y)$ に対し $F(a_1, a_2, b) = 0$，$F_y(a_1, a_2, b) \neq 0$ ならば (a_1, a_2) の近傍で陰関数 $y = f(x_1, x_2)$ が存在する。この時，F が C^r 級なら f も C^r 級。$\dfrac{\partial y}{\partial x_1} = -\dfrac{F_{x_1}}{F_y}$，$\dfrac{\partial y}{\partial x_2} = -\dfrac{F_{x_2}}{F_y}$ である。

$F(x,y) = x^3 - 3xy + y^3 = 0$(デカルトの正葉線) 両辺を x で微分することにより

$$y' = \frac{x^2 - y}{x - y^2}$$

(1)近傍とはある正数 δ が存在して $\{\, x \mid |x-a| < \delta \,\}$ となる集合の事。

(2) この場合の近傍とはある正数 δ が存在して $\left\{ (x,y) \,\middle|\, \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < \delta \right\}$ となる集合の事。

を得る。これを更に x で微分する事により

$$y'' = \frac{2xy}{(x-y^2)^3}$$

が分かる。

2 つの式 $x^2+y^2+z^2+w^2=1,\ x+y+z+w=0$ が与えられているとする。このとき 2 つの変数は残りの 2 つの変数の関数と見ることが出来る。今 z,w を x,y の関数と見て x に関して微分すれば $2x+2zz_x+2ww_x=0,\ 1+z_x+w_x=0$ が分かる。これを解くと

$$z_x = \frac{w-x}{z-w} \qquad w_x = \frac{z-x}{w-z}$$

を得る。同様に y に関して実行すれば

$$z_y \frac{w-y}{z-w} \qquad w_y = \frac{z-y}{w-z}$$

を得る。

演習問題 2.15　次で与えられる陰関数に関し $\dfrac{dy}{dx}, \dfrac{d^2y}{dx^2}$ を求めよ。

(1) $1-y+xe^y=0$

(2) $x^3y^3+y-x=0$