解析学 I 要綱 #11

2008–1–24　　河野

4.3 演算子法

微分するという操作を演算子と考え微分方程式を解く方法を紹介しよう。この節では特に断らなければ独立変数は x とする。

関数 y に対しその導関数 y' を対応させる写像を D と書く。独立変数を明示的に表したいときは D_x と書く。$D(y) = y'$ だから例えば命題 4.1 の微分方程式は $D(y) = ky$ と書ける。

定数 λ を定数倍するという演算子と見る。即ち λ を，y に対し λy を対応させる (関数を λ 倍するという) 演算子と考える。同様に関数 $p(x)$ を関数倍する (y に対し $p(x)y$ を対応させる) 演算子と見る事ができる。

演算子 E, F があるとき演算子の和 $E+F$ を $(E+F)(y) = E(y)+F(y)$ で定義する。積 DE を $(FE)(y) = F(E(y))$ で定義する。一般には $FE \neq EF$ である。例えば $E = D$,$F = p(x)$(関数倍) とすると $FE(y) = p(x)y'$ だが，$EF(y) = E(p(x)y) = p'(x)y + p(x)y'$，即ち $EF - FE = p'(x)$ となり，$p'(x) \neq 0$ のときは $EF \neq FE$ である。$EF \neq FE$ 除くと加法の交換法則，分配法則等は実数の和・積と同じ様に計算できる。

命題 4.1 の微分方程式は $D(y) = \lambda y$ であったが，$D(y) - \lambda y = 0$ と変形し，$D - \lambda$ を演算子と考えると $(D - \lambda)y = 0$ という式が得られる。

命題 4.3 $D-\lambda = e^{\lambda x} D e^{-\lambda x}$ が成立する。更に $P(x) = \displaystyle\int p(x)dx$ とすると $D-p(x) = e^{P(x)} D e^{-P(x)}$ が成立する。

証明　式が意味している事は任意の[(1)]関数 y に対し $(D - \lambda)y = (e^{\lambda x} D e^{-\lambda x})y$ が成立する事である。

$(De^{-\lambda x})y = D(e^{-\lambda x}y)$ であり，積の微分法より

$$
\begin{aligned}
D(e^{-\lambda x}y) &= D(e^{-\lambda x})y + e^{-\lambda x}D(y) \\
&= -\lambda e^{-\lambda x}y + e^{-\lambda x}D(y) \\
&= e^{-\lambda x}\{D(y) - \lambda y\} \\
&= e^{-\lambda x}(D - \lambda)y
\end{aligned}
$$

となる。両辺に $e^{\lambda x}$ を掛けると

$$
(D - \lambda)y = e^{\lambda x}\left\{D(e^{-\lambda x}y)\right\} = e^{\lambda x}\left\{(De^{-\lambda x})y\right\} = \left(e^{\lambda x}De^{-\lambda x}\right)y
$$

となり証明が終わる。後半の証明は $D(e^{-P(x)}) = -p(x)e^{P(x)}$ である事に注意すれば

$$
\begin{aligned}
D(e^{-P(x)}y) &= D(e^{-P(x)})y + e^{-P(x)}D(y) = -p(x)e^{-P(x)}y + e^{-P(x)}D(y) \\
&= e^{-P(x)}\{D(y) - p(x)y\} = e^{-P(x)}(D - p(x))\,y
\end{aligned}
$$

このプリントも含め講義関連のプリントは http://math.cs.kitami-it.ac.jp/~kouno/kougi.html においてある。

(1)勿論微分可能な関数でなければ，D は作用できない。厳密には考えている範囲をきちんと定義する必要があるがここではきちんとさせないでおく。それがいやな人は，さしあたり C^∞ 関数全体を考えておけばよいだろう。

となるので，

$$\left(e^{P(x)}De^{-P(x)}\right)y=(D-p(x))\,y$$

を得る。よって $\left(e^{P(x)}De^{-P(x)}\right)=(D-p(x))$ となる。∎

演算子法を用いて命題 4.1 の別証明を与えよう。$Du=0$ なら $u=C$(定数) である事を注意しておく。(一般に $Du=f(x)$ なら積分する事により $u=\displaystyle\int f(x)dx$ が得られる。) 与えられた微分方程式は演算子を用いて $(D-\lambda)y=0$ と書ける。命題 4.3 より $e^{\lambda x}De^{-\lambda x}y=0$ となる。$u=e^{-\lambda x}y$ とおくと $e^{\lambda x}Du=0$ となり，両辺に $e^{-\lambda x}$ を掛けると $Du=0$ を得る。よって $u=C$ となる。$C=u=e^{-\lambda x}y$ より $y=Ce^{\lambda x}$ を得る。

λ が定数でない場合でも演算子法を用いることにより次が得られる。

命題 4.4 微分方程式 $(D-p(x))\,y=0$ の一般解は $P(x)=\displaystyle\int p(x)dx$ とするとき

$$y=Ce^{P(x)}=C\exp\left(P(x)\right)=C\exp\left(\int p(x)dx\right)$$

である。

証明 命題 4.3 より $D-p(x)=e^{P(x)}De^{-P(x)}$ なので微分方程式は $\left(e^{P(x)}De^{-P(x)}\right)y=0$ と変形できる。$u=e^{-P(x)}y$ とおくと，$e^{P(x)}Du=0$ より $Du=0$ を得る。よって $u=C$(定数) とできるので，$y=ue^{P(x)}=Ce^{P(x)}$ が分かる。∎

一般に演算子 L を

$$L=a_n(x)D^n+a_{n-1}(x)D^{n-1}+\cdots+a_1(x)D+a_0(x)$$

とするとき (ただし $a_n(x)\not\equiv 0$ とする)，

$$Ly=f(x)$$

の形をしている微分方程式を n 階の**線型微分方程式** (*linear differential equation*) と呼ぶ。特に係数である $a_n(x)$ がすべて定数であるとき，定数係数の線型微分方程式という。定数係数の線型微分方程式は重要なタイプの微分方程式であり，しかも他のタイプに比べ解くのが容易である。この章では線型の微分方程式について議論する。また $f(x)=0$ のとき，この微分方程式を**同次型**といい，$f(x)\neq 0$ のとき**非同次型**という。

2 階の定数係数線型微分方程式を考える。最初に同次型を考える。例として $L=D^2-\lambda^2$ (ただし $\lambda\neq 0$ とする) とするとき $L(y)=0$ すなわち

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\lambda^2y$$

を解いてみよう。

定数倍という演算子は D と交換可能，即ち $D\lambda=\lambda D$ が成立する事を注意しておこう。

$$D^2-\lambda^2=(D-\lambda)(D+\lambda)$$

が成立するので

$$L(y) = (D^2 - \lambda^2)y = (D - \lambda)(D + \lambda)y = 0$$

となる。$u = (D + \lambda)y$ とおくと，$(D - \lambda)u = 0$ である。命題 4.3 より $D - \lambda = e^{\lambda x}De^{-\lambda x}$ なので $e^{\lambda x}De^{-\lambda x}u = 0$ が成立している。$v = e^{-\lambda x}u$ とおくと，$e^{\lambda x}Dv = 0$ より，両辺に $e^{-\lambda x}$ をかけると $Dv = 0$ となる。よって積分すると $v = C_1$ となる (C_1 は積分定数)。このとき $u = e^{\lambda x}v = C_1e^{\lambda x}$ となる。よって微分方程式は

$$(D + \lambda)y = C_1e^{\lambda x}$$

となる。命題 4.3 より $(D + \lambda) = e^{-\lambda x}De^{\lambda x}$ となるので

$$e^{-\lambda x}De^{\lambda x}y = C_1e^{\lambda x}$$

を得る。$z = e^{\lambda x}y$ とおくき，両辺に $e^{\lambda x}$ をかけると $Dz = C_1e^{2\lambda x}$ となる。両辺を積分する事により $z = \dfrac{C_1}{2\lambda}e^{2\lambda x} + C_2$ となる。$\dfrac{C_1}{2\lambda}$ をあらためて C_1 とおくと $z = C_1e^{2\lambda x} + C_2$，よって一般解 $y = C_1e^{\lambda x} + C_2e^{-\lambda x}$ を得る。

この例は一般化できる。演算子 $L = D^2 + aD + b$ に対し，微分方程式

$$Ly = 0$$

を考える。2 次方程式 $t^2 + at + b = 0$ が異なる 2 つの解をもつとする。この例と同じ方法で一般解を求めることができる。このことは興味のある学生に対する対する演習問題とする (演習問題 4.5)。

次の例として $L = D^2 - 2D + 1$ とするとき

$$Ly = 0$$

を考える。前の例と同じように計算すれば解が得られるが，結果の形は異なる。$L = (D - 1)^2$ と書けるので，$u = (D - 1)y$ とおくと，微分方程式は $(D - 1)u = 0$ となる。$D - 1 = e^xDe^{-x}$ なので

$$e^xDe^{-x}u = 0$$

が成立している。$v = e^{-x}u$ とおくと $e^xDv = 0$ となり，$Dv = 0$ を得る。よって $v = C_1$ としてよい。このとき $u = C_1e^x$ となる。$u = (D - 1)y$ なので，$(D - 1)y = C_1e^x$ となるが命題 4.3 を用いると

$$e^xDe^{-x}y = C_1e^x$$

となり，両辺に e^{-x} をかけて

$$D(e^{-x}y) = C_1$$

となる。両辺を積分すると

$$e^{-x}y = C_1x + C_2$$

となるので (C_2 は積分定数) 一般解

$$y = C_1xe^x + C_2e^x$$

を得る。この例と同じ方法で一般解を求めることができる。このことは興味のある学生に対する対する演習問題とする (演習問題 4.5)。

最後の例として微分方程式

$$\left(D^2+D+1\right)y=0$$

を考える。$\lambda_1=\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}$，$\lambda_2=\dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2}$ とおくと $D^2+D+1=(D-\lambda_1)(D-\lambda_2)$ と因数分解できるので，最初の例と同様に計算すれば，一般解は

$$y=C_1\exp\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}x\right)+C_2\exp\left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}x\right)$$

となる。$\exp\left(\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}x\right)$ は複素数値関数なので，解関数 y も複素値関数である。複素数値関数の範囲で解関数を調べている場合はこれで十分である。しかし実数値関数の解関数を必要とする場合は，オイラーの公式を用いて少し変形する必要がある。

オイラーの公式は

$$e^{ix}=\cos x+i\sin x$$

であった。これを用いると

$$\begin{aligned}\exp\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}x\right) &= \exp\left(-\frac{1}{2}x\right)\exp\left(i\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\\ &= \exp\left(-\frac{1}{2}x\right)\left\{\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+i\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right\}\end{aligned}$$

と変形できる。同様に

$$\exp\left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}x\right) = \exp\left(-\frac{1}{2}x\right)\left\{\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x-i\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right\}$$

となる。よって $C_1=\dfrac{1}{2}$，$C_2=\dfrac{1}{2}$ は微分方程式の特殊解であり，

$$y_1=\exp\left(-\frac{1}{2}x\right)\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x$$

となる。また $C_1=\dfrac{1}{2i}$，$C_2=-\dfrac{1}{2i}$ は微分方程式の特殊解であり，

$$y_2=\exp\left(-\frac{1}{2}x\right)\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x$$

となる。2 つの解が得られたので，C_1,C_2 を実数とするとき

$$C_1y_1+C_2y_2=C_1\exp\left(-\frac{1}{2}x\right)\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+C_2\exp\left(-\frac{1}{2}x\right)\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x$$

は微分方程式の実数値関数の解になっている。定理 4.2 を用いると実数値関数と考えたときの一般解であることが分かる。このことは一般化することができる。興味のある学生に対する対する演習問題とする (演習問題 4.6)。

演習問題 4.3　次の微分方程式を演算子法を用いて解け。ただし解関数は複素数値関数でもよいとする。

(1) $y' + y\sin x = 0$

(2) $y' + (x+1)y = 0$

(3) $y' + e^{2x}y = 0$

(4) $y'' - 5y' + 6y = 0$

(5) $y'' - y' - 6y = 0$

(6) $y'' + y = 0$

(7) $y'' + 4y = 0$

(8) $y'' - 2y' + y = 0$

(9) $y'' + 4y' + 4y = 0$

演習問題 4.4　次の微分方程式を実数値関数の範囲で解け。

(1) $y'' + y = 0$

(2) $y'' + \omega^2 y = 0 \qquad (0 \neq \omega \in \mathbb{R})$

(3) $y'' - y' + y = 0$

(4) $y'' - 2y' + 2y = 0$

演習問題 ***4.5**　次が成立することを示せ。

2 次式 $\varphi(t) = t^2 + at + b$ に対し方程式 $\varphi(t) = 0$ は解 α, β を持つとする。微分方程式

$$\left(D^2 + aD + b\right) y = 0$$

を考える。この微分方程式の一般解は $\alpha \neq \beta$ のとき

$$y = C_1 e^{\alpha x} + C_2 e^{\beta x}$$

であり，$\alpha = \beta$ のとき

$$y = C_1 x e^{\alpha x} + C_2 e^{\alpha x}$$

である。

演習問題 ***4.6**　次が成立することを示せ。

$\varphi(t) = t^2 + at + b = 0$ は実数解を持たないとする。$\varphi(t) = 0$ の複素解を $\lambda_1 \pm i\lambda_2$ とする。微分方程式

$$(D^2 + aD + b)y = 0$$

の実数値関数としての一般解は

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} \cos \lambda_2 x + C_2 e^{\lambda_1 x} \sin \lambda_2 x$$

である。ここで C_1, C_2 は実数である任意定数。

次に非同次型を扱おう。同次型の場合と同様に計算を実行すれば非同次型の場合も解を求めることができる。微分方程式

$$(D^2 - 4)y = e^x$$

の解を求めよう。$D^2 - 4 = (D-2)(D+2)$ なので，$(D-2)(D+2)y = e^x$ である。$u = (D+2)y$ とおくと，u に関する微分方程式は $(D-2)u = e^x$ となる。$D - 2 = e^{2x} D e^{-2x}$ なので

$$e^{2x} D e^{-2x} u = e^x$$

となる。$v = e^{-2x}u$ とおくと，v に関する微分方程式は

$$Dv = e^{-x}$$

となる。両辺を積分すると

$$v = -e^{-x} + C_1$$

を得る。$e^{-2x}u = -e^{-x} + C_1$ なので

$$u = e^{x} + C_1 e^{2x}$$

となる。$u = (D+2)y$ なので y に関する微分方程式は $(D+2)y = e^{x} + C_1 e^{2x}$ なので $D + 2 = e^{-2x} D e^{2x}$ を用いて

$$e^{-2x} D e^{2x} y = e^{x} + C_1 e^{2x}$$

と書ける。$w = e^{2x}y$ とおくと，w に関する微分方程式は

$$Dw = e^{3x} + C_1 e^{4x}$$

となる。両辺を積分して

$$w = \frac{1}{3}e^{3x} + \frac{C_1}{4}e^{4x} + C_2$$

を得る。$\dfrac{C_1}{4}$ を C_1 におき直すと，

$$y = \frac{1}{3}e^{x} + C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x}$$

を得る。

演習問題 4.7　次の微分方程式を解け。

(1) $\dfrac{dy}{dx} - 3y = e^{2x}$

(2) $\dfrac{dy}{dx} + 2y = \sin x$

(3) $\dfrac{dy}{dx} + 3y = x^2 + x$

(4) $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 2\dfrac{dy}{dx} - 3y = x + 4$

(5) $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 2\dfrac{dy}{dx} - 3y = \sin x$

(6) $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 2\dfrac{dy}{dx} - 3y = e^{2x}$