解析学 I 問題解説 #3

河野

演習問題 1.1　次の関数 $f(x)$ は連続かどうか調べよ。

(1) $y = f(x) = x^2 + ax + b$

(2) $y = f(x) = \dfrac{1}{x}$

(1)　$y = x^n$ に関しては $\lim_{x \to \alpha} x^n = \alpha^n$ が成立する。また和の極限については極限の和になるので，任意の実数 α に対し

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to \alpha} f(x) &= \lim_{x \to \alpha} \left(x^2 + ax + b\right) \\
&= \lim_{x \to \alpha} x^2 + \lim_{x \to \alpha} (ax) + \lim_{x \to \alpha} b \\
&= \lim_{x \to \alpha} x^2 + a \lim_{x \to \alpha} x + \lim_{x \to \alpha} b \\
&= \alpha^2 + a\alpha + b = f(\alpha)
\end{aligned}$$

となる。よって $f(x)$ は連続関数である。

(2)　講義で述べたように定義域をどこと考えるかが重要であった。定義域を $D = \mathbb{R} - \{0\}$ とすると，任意の $\alpha \in D$ に対し

$$\lim_{x \to \alpha} f(x) = \lim_{x \to \alpha} \frac{1}{x} = \frac{1}{\alpha} = f(\alpha)$$

ので $f(x)$ は連続関数である。

演習問題 1.2　$f(x+h)$ を 3 次式及び 4 次式で近似することを考える。ここで近似の一番よい 3 次式とは $d(h) = f(x+h) - (A + Bh + Ch^2 + Dh^3)$ に対し $\varepsilon(h) = \dfrac{d(h)}{h^3}$ とおくとき $\lim_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0$ が成立するものをいう。近似の一番よい 4 次式とは $d(h) = f(x+h) - (A + Bh + Ch^2 + Dh^3 + Eh^4)$ に対し $\varepsilon(h) = \dfrac{d(h)}{h^4}$ とおくとき $\lim_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0$ が成立するものをいう。x の近くで近似の一番よい 3 次式を求めよ。また近似の一番よい 4 次式式を求めよ。

最初に 3 次式で近似する。

$$d(h) = f(x+h) - (A + Bh + Ch^2 + Dh^3)$$

$$\varepsilon(h) = \frac{d(h)}{h^3}$$

とおくとき $\lim_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0$ が成立している。$d(h) = \varepsilon(h) h^3$ なので $\lim_{h \to 0} d(h) = 0$ が成立している。よって

$$\begin{aligned}
0 &= \lim_{h \to 0} d(h) \\
&= \lim_{h \to 0} \Big(f(x+h) - (A + Bh + Ch^2 + Dh^3) \Big) \\
&= \lim_{h \to 0} f(x+h) - \lim_{h \to 0} (A + Bh + Ch^2 + Dh^3) = f(x) - A
\end{aligned}$$

となるので $A=f(x)$ である。

$\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{d(h)}{h}=\lim_{h\to 0}\varepsilon(h)h^2=0$ なので

$$\begin{aligned}
0&=\lim_{h\to 0}\frac{d(h)}{h}\\
&=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-\bigl(f(x)+Bh+Ch^2+Dh^3\bigr)}{h}\\
&=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}-\lim_{h\to 0}\bigl(B+Ch+Dh^2\bigr)\\
&=f'(x)-B
\end{aligned}$$

となるので $B=f'(x)$ である。

$\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{d(h)}{h^2}=\lim_{h\to 0}\varepsilon(h)h=0$ なので

$$\begin{aligned}
0&=\lim_{h\to 0}\frac{d(h)}{h^2}\\
&=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-\bigl(f(x)+f'(x)h+Ch^2+Dh^3\bigr)}{h^2}\\
&=\lim_{h\to 0}\frac{f'(x+h)-f'(x)-2Ch-3Dh^2}{2h}\\
&=\lim_{h\to 0}\frac{f''(x+h)-2C-6Dh}{2}\\
&=\frac{f''(x)-2C}{2}
\end{aligned}$$

となるので $C=\dfrac{f''(x)}{2}$ である。ただし変形の途中でロピタルの定理を用いた。

$\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{d(h)}{h^3}=\lim_{h\to 0}\varepsilon(h)=0$ なので

$$\begin{aligned}
0&=\lim_{h\to 0}\frac{d(h)}{h^3}\\
&=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-\left(f(x)+f'(x)h+\dfrac{f''(x)}{2}h^2+Dh^3\right)}{h^3}\\
&=\lim_{h\to 0}\frac{f'(x+h)-f'(x)-f''(x)h-3Dh^2}{3h^2}\\
&=\lim_{h\to 0}\frac{f''(x+h)-f''(x)-6Dh}{6h}\\
&=\lim_{h\to 0}\frac{f'''(x+h)-6D}{6}\\
&=\frac{f'''(x)-6D}{6}
\end{aligned}$$

となるので $D=\dfrac{f'''(x)}{6}$ である。ただし変形の途中でロピタルの定理を用いた。

以上により最も近似のよい 3 次式は

$$f(x)+f'(x)h+\frac{f''(x)}{2}h^2+\frac{f'''(x)}{6}h^3$$

である。
　次に 4 次式での近似を考える。

$$d(h) = f(x+h) - (A + Bh + Ch^2 + Dh^3 + Eh^4)$$

$$\varepsilon(h) = \frac{d(h)}{h^4}$$

とおくとき $\lim_{h\to 0} \varepsilon(h) = 0$ が成立している。$d(h) = \varepsilon(h)h^4$ なので $\lim_{h\to 0} d(h) = 0$ が成立している。よって

$$\begin{aligned}
0 &= \lim_{h\to 0} d(h) \\
&= \lim_{h\to 0} \Big(f(x+h) - (A + Bh + Ch^2 + Dh^3 + Eh^4) \Big) \\
&= \lim_{h\to 0} f(x+h) - \lim_{h\to 0}(A + Bh + Ch^2 + Dh^3 + Eh^4) = f(x) - A
\end{aligned}$$

となるので $A = f(x)$ である。
$\lim_{h\to 0} \frac{d(h)}{h} = \lim_{h\to 0} \varepsilon(h)h^3 = 0$ なので

$$\begin{aligned}
0 &= \lim_{h\to 0} \frac{d(h)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - \big(f(x) + Bh + Ch^2 + Dh^3 + Eh^4\big)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - \lim_{h\to 0} \big(B + Ch + Dh^2 + Eh^3\big) \\
&= f'(x) - B
\end{aligned}$$

となるので $B = f'(x)$ である。
$\lim_{h\to 0} \frac{d(h)}{h^2} = \lim_{h\to 0} \varepsilon(h)h^2 = 0$ なので

$$\begin{aligned}
0 &= \lim_{h\to 0} \frac{d(h)}{h^2} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - \big(f(x) + f'(x)h + Ch^2 + Dh^3 + Eh^4\big)}{h^2} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f'(x+h) - f'(x) - 2Ch - 3Dh^2 - 4Eh^3}{2h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f''(x+h) - 2C - 6Dh - 12Eh^2}{2} \\
&= \frac{f''(x) - 2C}{2}
\end{aligned}$$

となるので $C = \frac{f''(x)}{2}$ である。

$\displaystyle\lim_{h\to0}\frac{d(h)}{h^3}=\lim_{h\to0}\varepsilon(h)h=0$ なので

$$
\begin{aligned}
0&=\lim_{h\to0}\frac{d(h)}{h^3}\\
&=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-\left(f(x)+f'(x)h+\frac{f''(x)}{2}h^2+Dh^3+Eh^4\right)}{h^3}\\
&=\lim_{h\to0}\frac{f'(x+h)-f'(x)-f''(x)h-3Dh^2-4Eh^3}{3h^2}\\
&=\lim_{h\to0}\frac{f''(x+h)-f''(x)-6Dh-12Eh^2}{6h}\\
&=\lim_{h\to0}\frac{f'''(x+h)-6D-24Eh}{6}\\
&=\frac{f'''(x)-6D}{6}
\end{aligned}
$$

となるので $D=\dfrac{f'''(x)}{6}$ である。ただし変形の途中でロピタルの定理を用いた。

$\displaystyle\lim_{h\to0}\frac{d(h)}{h^4}=\lim_{h\to0}\varepsilon(h)=0$ なので

$$
\begin{aligned}
0&=\lim_{h\to0}\frac{d(h)}{h^4}\\
&=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-\left(f(x)+f'(x)h+\frac{f''(x)}{2}h^2+\frac{f'''(x)}{6}h^3+Eh^4\right)}{h^4}\\
&=\lim_{h\to0}\frac{f'(x+h)-f'(x)-f''(x)h-\frac{f'''(x)}{2}h^2-4Eh^3}{4h^3}\\
&=\lim_{h\to0}\frac{f''(x+h)-f''(x)-f'''(x)h-12Eh^2}{12h^2}\\
&=\lim_{h\to0}\frac{f'''(x+h)-f'''(x)-24Eh}{24h}\\
&=\frac{f''''(x+h)-24E}{24}\\
&=\frac{f'''(x)-24E}{24}
\end{aligned}
$$

となるので $E=\dfrac{f''''(x)}{24}$ である。ただし変形の途中でロピタルの定理を用いた。

以上により最も近似のよい 4 次式は

$$
f(x)+f'(x)h+\frac{f''(x)}{2}h^2+\frac{f'''(x)}{6}h^3+\frac{f''''(x)}{24}h^4
$$

である。