解析学 I 問題解説 #4

河野

演習問題 1.3　実際に (1) を用いて (2) を証明せよ。

$F(x) = f(x) - g(x)$ とおくと

$$F'(x) = f'(x) - g'(x) = 0$$

である。(1) より $F(x)$ は定数関数となるので，ある定数 C が存在して，$F(x) = C$ となる。このとき $f(x) - g(x) = C$ なので $f(x) = g(x) + C$ となっている。

演習問題 1.4　(1) を証明せよ。

$x_1 < x_2$ を満たす任意の x_1, x_2 に対し平均値の定理を適用するとある $c\,(x_1 < c < x_2)$ が存在して $f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1)$ と書ける。このとき $f'(c) > 0, x_2 - x_1 > 0$ より $f(x_2) - f(x_1) > 0$ 即ち $f(x_1) > f(x_2)$ となる。よって f は単調増加である。

演習問題 1.5　(1) を証明せよ。

$x_1 < x_2$ を満たす任意の x_1, x_2 に対し平均値の定理を適用するとある $c\,(x_1 < c < x_2)$ が存在して $f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1)$ と書ける。このとき $f'(c) \geqq 0, x_2 - x_1 > 0$ より $f(x_2) - f(x_1) \geqq 0$ 即ち $f(x_1) \leqq f(x_2)$ となる。よって f は単調非減少である。

演習問題 1.6　次の関数の $x = 0$ におけるテーラー級数を求めよ (テーラー展開可能であることは仮定してよい)。

(1) $f(x) = \log(1+x)$　　(2) $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$

(3) $f(x) = \sqrt{1+x}$　　(4) $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$

(5) $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$

$$f(x) = a_0 + a_(x-a) + a_2(x-a)^2 + \cdots + a_n(x-a)^n + \cdots$$

とテーラー展開されているときには $a_n = \dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}$ である。n 次導関数を求めなくとも何らかの方法で求めてもよい。

(1)　$f(x) = \log(1+x)$ とおくと，$f'(x) = \dfrac{1}{1+x}$，$f''(x) = \dfrac{-1}{(1+x)^2}$ となる。n 回微分すると $f^{(n)}(x) = (-1)^{n+1}\dfrac{(n-1)!}{(1+x)^n}$ を得る。$a_n = \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!} = (-1)^{n+1}\dfrac{(n-1)!}{n!} = (-1)^{n+1}\dfrac{1}{n}$ なので

$$f(x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{1}{n}x^n + \cdots$$

となる。

(2) $f'(x)=\dfrac{1}{(1-x)^2}$，$f''(x)=\dfrac{2}{(1-x)^3}$ となる。n 回微分すると $f^{(n)}(x)=\dfrac{n!}{(1-x)^{n+1}}$ を得る。$a_n=\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}=\dfrac{n!}{n!}=1$ なので

$$f(x)=1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots$$

となる。

(3) $f'(x)=\dfrac{1}{2}(1+x)^{-\frac{1}{2}}$，$f''(x)=\dfrac{1}{2}\left(-\dfrac{1}{2}\right)(1+x)^{-\frac{3}{2}}$ となる。n 回微分すると

$$f^{(n)}(x)=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\cdots\left(-\frac{2n-3}{2}\right)(1+x)^{-\frac{2n-1}{2}}$$

を得る。

$$a_n=\frac{f^{(n)}(0)}{n!}=(-1)^{n-1}\frac{1\cdot 3\cdots(2n-3)}{2^n n!}\quad (n\geqq 2)$$

なので

$$f(x)=1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1\cdot 3\cdots(2n-3)}{2-nn!}x^n+\cdots$$

となる。$(2n)!!=2n(n-2)(2n-4)\cdots 4\cdot 2$，$(2n+1)!!=(2n+1)(2n-1)(2n-2)\cdots 3\cdot 1$ という記号を用いて表示することも考えられるが，講義で紹介していないので採用しなかった。

(4) $f'(x)=-\dfrac{1}{(1+x)^2}$，$f''(x)=\dfrac{2}{(1+x)^3}$ となる。n 回微分すると $f^{(n)}(x)=(-1)^n\dfrac{n!}{(1+x)^{n+1}}$ を得る。$a_n=\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}=(-1)^n\dfrac{n!}{n!}=(-1)^n$ なので

$$f(x)=1-x+x^2+\cdots+(-1)^n x^n+\cdots$$

となる。

(5) n 次導関数を求めなくても，$f^{(n)}(0)$ が求まればよいことに注目する。

$$f(x)(1+x^2)=1$$

と変形して両辺を n 回微分する。$1+x^2$ は 3 回以上微分すると 0 になることに注意するとライプニッツの定理より

$$f^{(n)}(x)(1+x^2)+{}_n\mathrm{C}_1 f^{(n-1)}(x)2x+{}_n\mathrm{C}_2 f^{(n-2)}(x)2=0$$

となる。$x=0$ を代入することにより，$f^{(n)}(0)+2\dfrac{n(n-1)}{2}f^{(n-2)}(0)=0$ を得る。$f(0)=1$，$f'(0)=0$，$f''(0)=2$ より数学的帰納法を用いると

$$f^{(2n-1)}(0)=0,\quad f^{(2n)}(0)=(-1)^n(2n)!$$

が成立することが示される。よって $a_{2n-1}=\dfrac{f^{(2n-1)}(0)}{(2n-1)!}=0$，$a_{2n}=\dfrac{f^{(2n)}(0)}{(2n)!}=(-1)^n$ より

$$f(x)=1-x^2+x^4+\cdots+(-1)^n x^{2n}+\cdots$$

を得る。

ここでは n 次導関数からテーラー級数を求めた。講義で紹介したように (2) では等比数列の和から求めることもできる。

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots$$

が得られているとき，この式の x に $-x$ を代入すると

$$\begin{aligned}\frac{1}{1+x} &= \frac{1}{1-(-x)} \\ &= 1 + (-x) + (-x)^2 + \cdots + (-x)^n + \cdots \\ &= 1 - x + x^2 + \cdots + (-1)^n x^n + \cdots\end{aligned}$$

となり (4) を得る。更にこの式に x^2 を代入すると

$$\begin{aligned}\frac{1}{1+x^2} &= \frac{1}{1+(x^2)} \\ &= 1 - x^2 + x^4 + \cdots + (-1)^n x^{2n} \cdots\end{aligned}$$

となり (5) を得る。

演習問題 1.7　次の関数を $x = a$ でテーラー (級数) 展開せよ (テーラー展開可能であることは仮定してよい)。

(1) $f(x) = x^5 \quad (a = 1)$

(2) $f(x) = e^x \quad (a = 1)$

(3) $f(x) = \sin x \quad (a = \pi)$

(4) $f(x) = \log x \quad (a = 1)$

(1)　導関数を求めてもよいが，多項式なので

$$\begin{aligned}x^5 &= \Big((x-1) + 1\Big)^5 \\ &= 1 + 5(x-1) + 10(x-1)^2 + 10(x-1)^3 + 5(x-1)^4 + (x-1)^5\end{aligned}$$

と 2 項展開してもよい。

(2)　$f(x) = e^x$ とおくと，$f'(x) = e^x$ である。よって何回微分しても

$$f^{(n)}(x) = e^x$$

となる。よって $a_n = \dfrac{1}{n!} f^{(n)}(1) = \dfrac{e}{n!}$ である。よってテーラー級数は

$$e^x = e + e(x-1) + \frac{e}{2}(x-1)^2 + \cdots + \frac{e}{n!}(x-1)^n + \cdots$$

となる。

(3)　$f(x) = \sin x$ とおくと $f'(x) = \cos x$，$f''(x) = -\sin x$，$f'''(x) = -\cos x$，$f^{(4)}(x) = \sin x$ となり，以下周期 4 で同じものが続く。$a_n = \dfrac{f^{(n)}(\pi)}{n!}$ とおくと n が偶数のときは $a_{2n} = 0$ であり，奇数のときは $a_{2n-1} = (-1)^n \dfrac{1}{(2n-1)!}$ である。よって

$$\sin x = -(x-\pi) + \frac{1}{3!}(x-\pi)^3 - \frac{1}{5!}(x-\pi)^5 + \cdots + (-1)^n \frac{1}{(2n-1)!}(x-\pi)^{2n-1} + \cdots$$

となる。

(4) n 次導関数を計算することによりテーラー級数を求めてもよいが，ここでは別の方法で求める。$\log x = \displaystyle\int \frac{1}{x}dx$ であることに注意する。

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{1+(x-1)} = 1-(x-1)+(x-1)^2+\cdots+(-1)^n(x-1)^n+\cdots$$

と級数展開できるので，両辺を積分して

$$\log x = a_0 + x - \frac{1}{2}(x-1)^2+\cdots+(-1)^n\frac{1}{n+1}(x-1)^{n+1}\cdots$$

を得る。この式に $x=1$ を代入する。$\log 1 = 0$ なので $0 = a_0+1$ より $a_0=-1$ となる。よって

$$\begin{aligned}\log x &= x-1-\frac{1}{2}(x-1)^2+\cdots+(-1)^n\frac{1}{n+1}(x-1)^{n+1}\cdots\\ &= x-1-\frac{1}{2}(x-1)^2+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}(x-1)^n\cdots\end{aligned}$$

となる。