解析学 I 問題解説 #5

河野

演習問題 2.1　上の関数が原点において連続でない事を示せ。また原点における偏導関数を求めよ

$z=f(x,y)$ が原点において連続であるとは $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=f(0,0)$ が成立することである。原点で連続でないことを示すには，この極限が存在しないか，存在しても $f(0,0)=0$ でないことを示せばよい。

$x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$ とおいて極座標で考える。$(x,y)\to(0,0)$ と $r\to 0$ は同値である。$f(x,y)=\dfrac{r\cos\theta r\sin\theta}{r^2\cos^2\theta+r^2\sin^2\theta}=\dfrac{r^2\cos\theta\sin\theta}{r^2}=\cos\theta\sin\theta$ となるので極限値は θ に依存する。たとえば $\theta=0$ のときは 0 であるが $\theta=\dfrac{\pi}{4}$ のときは $\dfrac{1}{2}$ である。2 変数の極限の定義よりこれは収束しない。よって $f(x,y)$ は $(0,0)$ で連続ではない。偏導関数は

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{h0}{h^2+0^2}-0}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{0}{h}=0\\
\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) &= \lim_{k\to 0}\frac{f(0,k)-f(0,0)}{k}=\lim_{k\to 0}\frac{\dfrac{0k}{0^2+k^2}-0}{k}=\lim_{k\to 0}\frac{0}{k}=0
\end{aligned}
$$

である。

演習問題 2.2　演習問題 2.1 の関数は原点で全微分可能でない事を示せ。

$f(x,y)$ が (x,y) で全微分可能でことの定義は

$$
\varepsilon(h,k) = \frac{f(x+h,y+k)-f(x,y)-\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)h-\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)}{\sqrt{h^2+k^2}}
$$

とおくとき $\displaystyle\lim_{(h,k)\to(0,0)}\varepsilon(h,k)=0$ が成立することである。

$(x,y)=(0,0)$ のとき

$$
\begin{aligned}
\varepsilon(h,k) &= \frac{f(0+h,0+k)-f(0,0)-\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)h-\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{\sqrt{h^2+k^2}}\\
&= \frac{\dfrac{hk}{h^2+k^2}-0-0h-0k}{\sqrt{h^2+k^2}}=\frac{hk}{(h^2+k^2)\sqrt{h^2+k^2}}
\end{aligned}
$$

となる。$h=r\cos\theta, k=r\sin\theta$ とおくと

$$
\varepsilon(h,k) = \frac{r\cos\theta r\sin\theta}{\big((r\cos\theta)^2+(r\sin\theta)^2\big)\sqrt{(r\cos\theta)^2+(r\sin\theta)^2}}=\frac{\cos\theta\sin\theta}{r}
$$

となる。$(h,k)\to(0,0)$ と $r\to 0$ は同値でなので $\displaystyle\lim_{(h,k)\to(0,0)}\varepsilon(h,k)=\lim_{r\to 0}\frac{\cos\theta\sin\theta}{r}$ となる。これは収束しないので f は $(0,0)$ において全微分可能ではない。

演習問題 2.3 次の関数の偏導関数を求めよ。

(1) $z=x^3-3xy+y^3$
(2) $z=(x^3+y^4)^{100}$
(3) $z=\dfrac{x-y}{2x+3y}$
(4) $z=\sqrt{x^2+y^2}$
(5) $e^{ax^2+by^2}$
(6) $z=x\arctan\dfrac{x}{y}$
(7) $z=xy\sin(x^2+y^2)$
(8) $z=x^2y^2\log(x^3+y^3)$
(9) $z=xy\arcsin\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$
(10) $z=x^xy^yx^yy^x$

x に関数導関数は，y を定数として x に関する 1 変数関数と見て微分すれば求まる。よって 1 変数関数の色々な定理を用いて計算することができる。ここでは結果のみ記しておく。

(1) $\dfrac{\partial z}{\partial x}=3x^2-3y,\quad \dfrac{\partial z}{\partial y}=-3x+3y^2$

(2) $\dfrac{\partial z}{\partial x}=300(x^3+y^4)^{99}x^2,\quad \dfrac{\partial z}{\partial y}=400(x^3+y^4)^{99}y^3$

(3) $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{5y}{(2x+3y)^2},\quad \dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{5x}{(2x+3y)^2}$

(4) $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\quad \dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$

(5) $\dfrac{\partial z}{\partial x}=2axe^{ax^2+by^2},\quad \dfrac{\partial z}{\partial y}=2bye^{ax^2+by^2}$

(6) $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\arctan\dfrac{x}{y}+\dfrac{xy}{x^2+y^2},\quad \dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{x^2}{x^2+y^2}$

(7) $\dfrac{\partial z}{\partial x}=y\sin(x^2+y^2)+2x^2y\cos(x^2+y^2),\quad \dfrac{\partial z}{\partial y}=x\sin(x^2+y^2)+2xy^2\cos(x^2+y^2)$

(8) $\dfrac{\partial z}{\partial x}=2xy^2\log(x^3+y^3)+\dfrac{3x^4y^2}{x^3+y^3},\quad \dfrac{\partial z}{\partial y}=2x^2y\log(x^3+y^3)+\dfrac{3x^2y^4}{x^3+y^3}$

(9) $\dfrac{\partial z}{\partial x}=y\arcsin\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}+\dfrac{2xy^2}{x^2+y^2},\quad \dfrac{\partial z}{\partial y}=x\arcsin\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}-\dfrac{2x^2y}{x^2+y^2}$

(10)

$$\frac{\partial z}{\partial x}=x^x(\log x+1)y^yx^yy^x+x^xy^yx^{y-1}y^{x+1}+x^xy^yx^yy^x\log y,$$
$$\frac{\partial z}{\partial y}=x^xy^y(\log y+1)x^yy^x+x^xy^yx^{y+1}y^{x-1}+x^xy^yx^yy^x\log x$$