解析学 I 問題解説 #6

河野

演習問題 2.4　次の場合に $\dfrac{D(x,y)}{D(u,v)}$ 及び $\dfrac{D(u,v)}{D(x,y)}$ を求めよ。

(1) $x = v^2, y = u^2$　　(2) $x = u^2 - v^2, y = 2uv$

(3) $x = u\cos v, y = u\sin v$　　(4) $x = u, y = u + v$

$\dfrac{D(u,v)}{D(x,y)}$ を直接求めることは難しいので，最初に $\dfrac{D(x,y)}{D(u,v)}$ を求めて，逆行列を求めることにより，$\dfrac{D(u,v)}{D(x,y)}$ を求める。ヤコビ行列は変数の順序が変わると別のヤコビ行列になる。順序を間違えないこと。$\dfrac{D(x,y)}{D(u,v)}$ でいうと，独立変数が左から右へ u, v，従属変数は縦で上から下に x, y となる。わざわざこんな事を書いたのは，試験のときこの間違いのためすべて間違うものがいるからである。

(1) $\dfrac{\partial x}{\partial u} = 0, \dfrac{\partial x}{\partial v} = 2v, \dfrac{\partial y}{\partial u} = 2u, \dfrac{\partial y}{\partial v} = 0$ なので

$$\frac{D(x,y)}{D(u,v)} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2v \\ 2u & 0 \end{pmatrix}$$

となる。$\dfrac{D(u,v)}{D(x,y)}$ は $\dfrac{D(x,y)}{D(u,v)}$ の逆行列なので

$$\frac{D(u,v)}{D(x,y)} = \left(\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 2v \\ 2u & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{1}{2u} \\ \dfrac{1}{2v} & 0 \end{pmatrix}$$

(2) $\dfrac{D(x,y)}{D(u,v)} = \begin{pmatrix} 2u & -2v \\ 2v & 2u \end{pmatrix}, \dfrac{D(u,v)}{D(x,y)} = \dfrac{1}{2(u^2+v^2)}\begin{pmatrix} u & v \\ -v & u \end{pmatrix}$

(3) $\dfrac{D(x,y)}{D(u,v)} = \begin{pmatrix} \cos v & -u\sin v \\ \sin v & u\cos v \end{pmatrix}, \dfrac{D(u,v)}{D(x,y)} = \begin{pmatrix} \cos v & \sin v \\ -\dfrac{\sin v}{u} & \dfrac{\cos v}{u} \end{pmatrix}$

(4) $\dfrac{D(x,y)}{D(u,v)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \dfrac{D(u,v)}{D(x,y)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

逆行列の求め方が分からない人（またはすぐ忘れる人）へ: $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ の逆行列は

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

で与えられた。これを忘れたときは次の様に定義に基づいて逆行列を計算して求めてもよい。

$A^{-1}=\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$ とおくと，$AA^{-1}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ より p,q,r,s に関する連立 1 次方程式 (p,q,r,s が未知数で，a,b,c,d は既知数)

$$ap+br=1, aq+bs=0, cp+dr=0, cq+ds=1$$

を得る。これを解くと $p=\dfrac{d}{ad-bc}, q=\dfrac{-b}{ad-bc}, r=\dfrac{-c}{ad-bc}, d=\dfrac{a}{ad-bc}$ が分かる。

演習問題 2.5　次の関数に対し $\dfrac{\partial z}{\partial s}, \dfrac{\partial z}{\partial t}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial s^2}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial t^2}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial s \partial t}$ を求めよ。

(1) $z=x+y^2$,$s=x+y, t=xy$

(2) $z=x+y$,$s=x^2+y^2, t=x^2y^2$

(3) $z=x+y, s=x^2+y^2, t=xy$

(4) $z=x+y, s=x^2-y^2, t=2xy$

(5) $z=xy, s=x, t=x+y$

(6) $z=xy, s=x\cos y, t=x\sin y$

スペース節約のため 2 次導関数は行列の形で表現しているが，行列で表現しなければいけないという分けでは勿論ない。

(1) $\dfrac{D(s,t)}{D(x,y)}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ y & x \end{pmatrix}$ である。$\dfrac{D(x,y)}{D(s,t)}$ は $\dfrac{D(x,y)}{D(s,t)}$ の逆行列なので

$$\frac{D(x,y)}{D(s,t)}=\begin{pmatrix} \dfrac{x}{x-y} & -\dfrac{1}{x-y} \\ -\dfrac{y}{x-y} & \dfrac{1}{x-y} \end{pmatrix}$$

となる。一方 $\dfrac{D(z)}{D(x,y)}=(1\ \ 2\,y)$ であり，$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial z}{\partial s} & \dfrac{\partial z}{\partial t} \end{pmatrix}=\dfrac{D(z)}{D(s,t)}=\dfrac{D(z)}{D(x,y)}\dfrac{D(x,y)}{D(s,t)}$ なので

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial z}{\partial s} & \dfrac{\partial z}{\partial t} \end{pmatrix}=\frac{D(z)}{D(s,t)}=\begin{pmatrix} \dfrac{x-2\,y^2}{x-y} & \dfrac{-1+2\,y}{x-y} \end{pmatrix}$$

である。また

$$\frac{D(z_s,z_t)}{D(x,y)}=\begin{pmatrix} \dfrac{y\,(-1+2\,y)}{(x-y)^2} & -\dfrac{4\,x\,y-2\,y^2-x}{(x-y)^2} \\ -\dfrac{-1+2\,y}{(x-y)^2} & \dfrac{2\,x-1}{(x-y)^2} \end{pmatrix}$$

が成立している。$\begin{pmatrix} z_{ss} & z_{st} \\ z_{ts} & z_{tt} \end{pmatrix}=\dfrac{D(z_s,z_t)}{D(s,t)}=\dfrac{D(z_s,z_t)}{D(x,y)}\dfrac{D(x,y)}{D(s,t)}$ に代入して

$$\begin{pmatrix} z_{ss} & z_{st} \\ z_{ts} & z_{tt} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \dfrac{2\,y\,(-x+3\,x\,y-y^2)}{(x-y)^3} & -\dfrac{-x+4\,x\,y-y}{(x-y)^3} \\ -\dfrac{-x+4\,x\,y-y}{(x-y)^3} & \dfrac{2\,(-1+y+x)}{(x-y)^3} \end{pmatrix}$$

を得る。

(2) $\dfrac{D(s,y)}{D(x,y)}=\begin{pmatrix} 2\,x & 2\,y \\ 2\,x\,y^2 & 2\,x^2\,y \end{pmatrix}$ である。$\dfrac{D(x,y)}{D(s,t)}$ は $\dfrac{D(x,y)}{D(s,t)}$ の逆行列なので

$$\frac{D(x,y)}{D(s,t)}=\begin{pmatrix} \dfrac{x}{2\,(x^2-y^2)} & -\dfrac{1}{2\,x\,(x^2-y^2)} \\ -\dfrac{y}{2\,(x^2-y^2)} & \dfrac{1}{2\,y\,(x^2-y^2)} \end{pmatrix}$$

となる。一方 $\dfrac{D(z)}{D(x,y)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}$ であり，$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial z}{\partial s} & \dfrac{\partial z}{\partial t} \end{pmatrix} = \dfrac{D(z)}{D(s,t)} = \dfrac{D(z)}{D(x,y)}\dfrac{D(x,y)}{D(s,t)}$ なので

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial z}{\partial s} & \frac{\partial z}{\partial t} \end{pmatrix} = \frac{D(z)}{D(s,t)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2\,(x+y)} & \frac{1}{2\,(x+y)\,x\,y} \end{pmatrix}$$

である。また

$$\frac{D(z_s,z_t)}{D(x,y)} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2\,(x+y)^2} & -\frac{1}{2\,(x+y)^2} \\ -\frac{2\,x+y}{2\,(x+y)^2\,x^2\,y} & -\frac{2\,y+x}{2\,(x+y)^2\,x\,y^2} \end{pmatrix}$$

が成立している。$\begin{pmatrix} z_{ss} & z_{st} \\ z_{ts} & z_{tt} \end{pmatrix} = \dfrac{D(z_s,z_t)}{D(s,t)} = \dfrac{D(z_s,z_t)}{D(x,y)}\dfrac{D(x,y)}{D(s,t)}$ に代入して

$$\begin{pmatrix} z_{ss} & z_{st} \\ z_{ts} & z_{tt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4\,(x+y)^3} & -\frac{1}{4\,(x+y)^3\,x\,y} \\ -\frac{1}{4\,(x+y)^3\,x\,y} & -\frac{x^2+3\,x\,y+y^2}{4\,(x+y)^3\,y^3\,x^3} \end{pmatrix}$$

を得る。

(3) $\dfrac{D(s,y)}{D(x,y)} = \begin{pmatrix} 2\,x & 2\,y \\ y & x \end{pmatrix}$ である。$\dfrac{D(x,y)}{D(s,t)}$ は $\dfrac{D(x,y)}{D(s,t)}$ の逆行列なので

$$\frac{D(x,y)}{D(s,t)} = \begin{pmatrix} \frac{x}{2\,(x^2-y^2)} & -\frac{y}{x^2-y^2} \\ -\frac{y}{2\,(x^2-y^2)} & \frac{x}{x^2-y^2} \end{pmatrix}$$

となる。一方 $\dfrac{D(z)}{D(x,y)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}$ であり，$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial z}{\partial s} & \dfrac{\partial z}{\partial t} \end{pmatrix} = \dfrac{D(z)}{D(s,t)} = \dfrac{D(z)}{D(x,y)}\dfrac{D(x,y)}{D(s,t)}$ なので

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial z}{\partial s} & \frac{\partial z}{\partial t} \end{pmatrix} = \frac{D(z)}{D(s,t)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2\,(x+y)} & \frac{1}{x+y} \end{pmatrix}$$

である。また

$$\frac{D(z_s,z_t)}{D(x,y)} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2\,(x+y)^2} & -\frac{1}{2\,(x+y)^2} \\ -\frac{1}{(x+y)^2} & -\frac{1}{(x+y)^2} \end{pmatrix}$$

が成立している。$\begin{pmatrix} z_{ss} & z_{st} \\ z_{ts} & z_{tt} \end{pmatrix} = \dfrac{D(z_s,z_t)}{D(s,t)} = \dfrac{D(z_s,z_t)}{D(x,y)}\dfrac{D(x,y)}{D(s,t)}$ に代入して

$$\begin{pmatrix} z_{ss} & z_{st} \\ z_{ts} & z_{tt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4\,(x+y)^3} & -\frac{1}{2\,(x+y)^3} \\ -\frac{1}{2\,(x+y)^3} & -\frac{1}{(x+y)^3} \end{pmatrix}$$

を得る。

(4) $\dfrac{D(s,y)}{D(x,y)} = \begin{pmatrix} 2\,x & -2\,y \\ 2\,y & 2\,x \end{pmatrix}$ である。$\dfrac{D(x,y)}{D(s,t)}$ は $\dfrac{D(x,y)}{D(s,t)}$ の逆行列なので

$$\frac{D(x,y)}{D(s,t)} = \begin{pmatrix} \dfrac{x}{2\,(x^2+y^2)} & \dfrac{y}{2\,(x^2+y^2)} \\ -\dfrac{y}{2\,(x^2+y^2)} & \dfrac{x}{2\,(x^2+y^2)} \end{pmatrix}$$

となる。一方 $\dfrac{D(z)}{D(x,y)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}$ であり，$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial z}{\partial s} & \dfrac{\partial z}{\partial t} \end{pmatrix} = \dfrac{D(z)}{D(s,t)} = \dfrac{D(z)}{D(x,y)}\dfrac{D(x,y)}{D(s,t)}$ なので

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial z}{\partial s} & \frac{\partial z}{\partial t} \end{pmatrix} = \frac{D(z)}{D(s,t)} = \begin{pmatrix} \dfrac{x-y}{2\,(x^2+y^2)} & \dfrac{x+y}{2\,(x^2+y^2)} \end{pmatrix}$$

である。また

$$\frac{D(z_s,z_t)}{D(x,y)} = \begin{pmatrix} -\dfrac{x^2-y^2-2\,x\,y}{2\,(x^2+y^2)^2} & -\dfrac{x^2-y^2+2\,x\,y}{2\,(x^2+y^2)^2} \\ -\dfrac{x^2-y^2+2\,x\,y}{2\,(x^2+y^2)^2} & \dfrac{x^2-y^2-2\,x\,y}{2\,(x^2+y^2)^2} \end{pmatrix}$$

が成立している。$\begin{pmatrix} z_{ss} & z_{st} \\ z_{ts} & z_{tt} \end{pmatrix} = \dfrac{D(z_s,z_t)}{D(s,t)} = \dfrac{D(z_s,z_t)}{D(x,y)}\dfrac{D(x,y)}{D(s,t)}$ に代入して

$$\begin{pmatrix} z_{ss} & z_{st} \\ z_{ts} & z_{tt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\dfrac{-3\,x^2\,y+y^3-3\,x\,y^2+x^3}{4\,(x^2+y^2)^3} & -\dfrac{3\,x^2\,y-y^3-3\,x\,y^2+x^3}{4\,(x^2+y^2)^3} \\ -\dfrac{3\,x^2\,y-y^3-3\,x\,y^2+x^3}{4\,(x^2+y^2)^3} & \dfrac{-3\,x^2\,y+y^3-3\,x\,y^2+x^3}{4\,(x^2+y^2)^3} \end{pmatrix}$$

を得る。

(5) $\dfrac{D(s,y)}{D(x,y)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ である。$\dfrac{D(x,y)}{D(s,t)}$ は $\dfrac{D(x,y)}{D(s,t)}$ の逆行列なので

$$\frac{D(x,y)}{D(s,t)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

となる。一方 $\dfrac{D(z)}{D(x,y)} = \begin{pmatrix} y & x \end{pmatrix}$ であり，$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial z}{\partial s} & \dfrac{\partial z}{\partial t} \end{pmatrix} = \dfrac{D(z)}{D(s,t)} = \dfrac{D(z)}{D(x,y)}\dfrac{D(x,y)}{D(s,t)}$ なので

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial z}{\partial s} & \frac{\partial z}{\partial t} \end{pmatrix} = \frac{D(z)}{D(s,t)} = \begin{pmatrix} y-x & x \end{pmatrix}$$

である。また

$$\frac{D(z_s,z_t)}{D(x,y)} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

が成立している。$\begin{pmatrix} z_{ss} & z_{st} \\ z_{ts} & z_{tt} \end{pmatrix} = \dfrac{D(z_s,z_t)}{D(s,t)} = \dfrac{D(z_s,z_t)}{D(x,y)}\dfrac{D(x,y)}{D(s,t)}$ に代入して

$$\begin{pmatrix} z_{ss} & z_{st} \\ z_{ts} & z_{tt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

を得る。

(6) $\dfrac{D(s,y)}{D(x,y)} = \begin{pmatrix} \cos y & -x\sin y \\ \sin y & x\cos y \end{pmatrix}$ である。$\dfrac{D(x,y)}{D(s,t)}$ は $\dfrac{D(x,y)}{D(s,t)}$ の逆行列なので

$$\frac{D(x,y)}{D(s,t)} = \begin{pmatrix} \cos y & \sin y \\ -\dfrac{\sin y}{x} & \dfrac{\cos y}{x} \end{pmatrix}$$

となる。一方 $\dfrac{D(z)}{D(x,y)} = \begin{pmatrix} y & x \end{pmatrix}$ であり，$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial z}{\partial s} & \dfrac{\partial z}{\partial t} \end{pmatrix} = \dfrac{D(z)}{D(s,t)} = \dfrac{D(z)}{D(x,y)}\dfrac{D(x,y)}{D(s,t)}$ なので

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial z}{\partial s} & \frac{\partial z}{\partial t} \end{pmatrix} = \frac{D(z)}{D(s,t)} = \begin{pmatrix} y\cos y - \sin y & y\sin y + \cos y \end{pmatrix}$$

である。また

$$\frac{D(z_s,z_t)}{D(x,y)} = \begin{pmatrix} 0 & -y\sin y \\ 0 & y\cos y \end{pmatrix}$$

が成立している。$\begin{pmatrix} z_{ss} & z_{st} \\ z_{ts} & z_{tt} \end{pmatrix} = \dfrac{D(z_s,z_t)}{D(s,t)} = \dfrac{D(z_s,z_t)}{D(x,y)}\dfrac{D(x,y)}{D(s,t)}$ に代入して

$$\begin{pmatrix} z_{ss} & z_{st} \\ z_{ts} & z_{tt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{y\sin^2 y}{x} & -\dfrac{y\sin y\cos y}{x} \\ -\dfrac{y\sin y\cos y}{x} & \dfrac{y\cos^2 y}{x} \end{pmatrix}$$

を得る。

演習問題 2.6 $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ とする (2 次元の極座標表示)。ヤコビ行列 $\dfrac{D(x,y)}{D(r,\theta)}$ およびヤコビアン $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}$ を計算し，関数 $z = f(x,y)$ に対し次を示せ。

(1) $\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = \left(\dfrac{\partial z}{\partial r}\right)^2 + \left(\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2$

(2) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial z}{\partial r} + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 z}{\partial \theta^2}$

ヤコビ行列は $\dfrac{D(x,y)}{D(r,\theta)} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}$ である。$\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \det\dfrac{D(x,y)}{D(r,\theta)}$ なので

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \cos\theta \times r\cos\theta - (-r\sin\theta)\times\sin\theta = r\left(\cos^2\theta + \sin^2\theta\right) = r$$

である。

(1) $\dfrac{\partial z}{\partial r} = \dfrac{\partial z}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial r} + \dfrac{\partial z}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial r}$, $\dfrac{\partial z}{\partial \theta} = \dfrac{\partial z}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial \theta} + \dfrac{\partial z}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial \theta}$ なので

$$\frac{\partial z}{\partial r} = \frac{\partial z}{\partial x}\cos\theta + \frac{\partial z}{\partial y}\sin\theta, \qquad \frac{\partial z}{\partial \theta} = -\frac{\partial z}{\partial x}r\sin\theta + \frac{\partial z}{\partial y}r\cos\theta \tag{1}$$

となる。よって

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2+\left(\frac{1}{r}\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2 &= \left(\frac{\partial z}{\partial x}\cos\theta+\frac{\partial z}{\partial y}\sin\theta\right)^2+\left(-\frac{\partial z}{\partial x}\sin\theta+\frac{\partial z}{\partial y}\cos\theta\right)^2 \\
&= \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2\cos^2\theta+2\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}\cos\theta\sin\theta+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\sin^2\theta \\
&\quad +\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2\sin^2\theta-2\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}\cos\theta\sin\theta+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\cos^2\theta \\
&= \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2
\end{aligned}$$

となる。

(2) 式 (1) より

$$\frac{\partial^2 z}{\partial r^2} = \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)=\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\cos\theta+\frac{\partial z}{\partial y}\sin\theta\right)=\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\cos\theta+\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)\sin\theta$$

となるが,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\frac{\partial x}{\partial r}+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\frac{\partial y}{\partial r}=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\cos\theta+\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\sin\theta \\
\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)\frac{\partial x}{\partial r}+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)\frac{\partial y}{\partial r}=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\cos\theta+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\sin\theta
\end{aligned}$$

を代入して

$$\frac{\partial^2 z}{\partial r^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\cos^2\theta+2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\cos\theta\sin\theta+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\sin^2\theta$$

を得る。計算の途中で $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$ を使った。

同様に式 (1) より

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2} &= \frac{\partial}{\partial \theta}\left(-\frac{\partial z}{\partial x}r\sin\theta+\frac{\partial z}{\partial y}r\cos\theta\right) \\
&= -\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)r\sin\theta-\frac{\partial z}{\partial x}r\cos\theta+\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)r\cos\theta-\frac{\partial z}{\partial y}r\sin\theta
\end{aligned}$$

となるが,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\frac{\partial x}{\partial \theta}+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\frac{\partial y}{\partial \theta}=-\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}r\sin\theta+\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}r\cos\theta \\
\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)\frac{\partial x}{\partial \theta}+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)\frac{\partial y}{\partial \theta}=-\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial t}r\sin\theta+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}r\cos\theta
\end{aligned}$$

を代入して

$$\frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}r^2\sin^2\theta-2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}r^2\sin\theta\cos\theta+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}r^2\cos^2\theta-\frac{\partial z}{\partial x}r\cos\theta-\frac{\partial z}{\partial y}r\sin\theta$$

を得る。よって

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2} &= \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\left(\cos^2\theta+\sin^2\theta\right)+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\left(\sin^2\theta+\cos^2\theta\right)-\frac{1}{r}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\cos\theta+\frac{\partial z}{\partial y}\sin\theta\right)\\ &= \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}-\frac{1}{r}\frac{\partial z}{\partial r}\end{aligned}$$

を得る。

演習問題 2.7

(1) $x=u\cos\alpha-v\sin\alpha$, $y=u\sin\alpha+v\cos\alpha$ (α は定数) のとき次を示せ。

1) $z_x^2+z_y^2=z_u^2+z_v^2$

2) $z_{xx}+z_{yy}=z_{uu}+z_{vv}$

(2) $x+y=e^{u+v}$, $x-y=e^{u-v}$ に対し $z_{xx}-z_{yy}=e^{-2u}(z_{uu}-z_{vv})$ が成立することを示せ。

(3) $x+y=u$, $y=uv$ ならば $xz_{xx}+yz_{xy}+z_x=uz_{uu}-vz_{uv}+z_u$ となる事を示せ。

(1) x を u で微分すると $x_u=\cos\alpha$, v で微分すると $x_v=-\sin\alpha$ を得る。同様に $y_u=\sin\alpha$, $y_v=\cos\alpha$ となる。合成関数の微分法より

$$\begin{aligned}z_u &= z_x x_u+z_y y_u\\ z_v &= z_x x_v+z_y y_v\end{aligned}$$

が得られる。これを用いて $z_u^2+z_v^2$ を計算すると

$$\begin{aligned}z_u^2+z_v^2 &= (z_x\cos\alpha-z_y\sin\alpha)^2+(z_x\sin\alpha+z_y\cos\alpha)^2\\ &= z_x^2\cos^2\alpha-2z_xz_y\cos\alpha\sin\alpha+z_y^2\sin^2\alpha+z_x^2+2z_xz_y\sin\alpha\cos\alpha+z_y^2\cos^2\alpha\\ &= z_x^2(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)+z_y^2(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)\\ &= z_x^2+z_y^2\end{aligned}$$

となる。

$z_u=z_xx_u+z_yy_u$ を u で微分すると，積の微分法より

$$(z_u)_u=(z_x)_ux_u+z_x(x_u)_u+(z_y)_uy_u+z_y(y_u)_u$$

となる。x_u, y_u は定数なので $(x_u)_u=0, (y_u)_u=0$ である。また $(z_x)_u, (z_y)_u$ に合成関数の微分法をもう一度適用すると，$(z_x)_u=(z_x)_xx_u+(z_x)_yy_u, (z_y)_u=(z_y)_xx_u+(z_y)_yy_u$ となる。よってこれらを前式に代入すると

$$z_{uu}=z_{xx}x_u^2+2z_{xy}x_uy_u+z_{yy}y_u^2=z_{xx}\cos^2\alpha+2z_{xy}\cos\alpha\sin\alpha+z_{yy}\sin^2\alpha$$

が得られる。ただし計算途中で $z_{xy}=z_{yx}$ を使用した。同様に z_{vv} を計算すると

$$z_{vv}=z_{xx}\sin^2\alpha-2z_{xy}\cos\alpha\sin\alpha+z_{yy}\cos^2\alpha$$

となり, これらを加えると

$$z_{uu}+z_{vv}=z_{xx}(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)+z_{yy}(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)=z_{xx}+z_{yy}$$

となる。

(2) $x=\dfrac{e^{u+v}+e^{u-v}}{2}, y=\dfrac{e^{u+v}-e^{u-v}}{2}$ なので

$$\frac{D(x,y)}{D(u,v)}=\begin{pmatrix} x & y \\ y & x \end{pmatrix}$$

となる。

$$z_u=z_x x_u+z_y y_u=z_x x+z_y y$$

を u で微分すると

$$\begin{aligned} z_{uu} &= \frac{\partial}{\partial u}(z_x x)+\frac{\partial}{\partial u}(z_y y) \\ &= (z_x)_u x+z_x x_u+(z_y)_u y+z_y y_u \\ &= (z_{xx}x_u+z_{xy}y_u)\,x+z_x x+(z_{yx}x_u+z_{yy}y_u)\,y+z_y y \\ &= z_{xx}x^2+2z_{xt}xy+z_{yy}y^2+z_x x+z_y y \end{aligned}$$

となる。

$$z_v=z_x x_v+z_y y_v=z_x y+z_y x$$

を v で微分すると

$$\begin{aligned} z_{vv} &= (z_x)_v y+z_x y_v+(z_y)_v x+z_y x_v \\ &= (z_{xx}x_v+z_{xy}y_v)\,y+z_x x+(z_{yx}x_v+z_{yy}y_v)\,x+z_y y \\ &= z_{xx}y^2+2z_{xy}xy+z_{yy}x^2+z_x x+z_y y \end{aligned}$$

となる。よって $z_{uu}-z_{vv}=(z_{xx}-z_{yy})(x^2-y^2)$ となるが，$x^2-y^2=e^{2u}$ なので式が証明された。

(3) $x=u-y=u-uv$ なので

$$\frac{D(x,y)}{D(u,v)}=\begin{pmatrix} 1-v & -u \\ v & u \end{pmatrix}$$

である。

$$z_u=z_x x_u+z_u u_y=z_x(1-v)+z_y v$$

を u で微分すると

$$\begin{aligned} z_{uu} &= (z_u)_u(1-v)+(z_y)_u v \\ &= (z_{xx}x_u+z_{xy}y_u)\,(1-v)+(z_{yx}x_u+z_{yy}y_u)\,v \\ &= z_{xx}(1-v)^2+2z_{xy}u(1-v)+z_{yy}v^2 \end{aligned}$$

であり，z_u を v で微分すると

$$\begin{aligned} z_{uv} &= (z_x)_v(1-v)+z_x(1-v)_v+(z_y)_v v+z_y v_v \\ &= (z_{xx}x_v+z_{xy}y_v)\,(1-v)-z_x+(z_{yx}x_v+z_{yy}y_v)\,v+z_y \\ &= -z_{xx}u(1-v)+z_{xy}u(1-v)-z_{xy}uv+z_{yy}uv-z_x+z_y \end{aligned}$$

となる。よって

$$\begin{aligned} uz_{uu} - vz_{uv} + z_u &= z_{xx}u(1-v)^2 + 2z_{xy}uv(1-v) + z_{yy}uv^2 + z_{xx}uv(1-v) - z_{xy}uv(1-v) \\ &\quad + z_{xy}uv^2 - z_{yy}uv^2 + z_x v - z_y v + z_x(1-v) + z_y v \\ &= z_{xx}u(1-v) + z_{xy}uv + z_x \\ &= xz_{xx} + yz_{yy} + z_x \end{aligned}$$

が得られる。

演習問題 2.8　次の関数の偏導関数を求めよ。

(1) $w = f(x,y,z) = x^2y^3z^4$　　(2) $w = xyz\sin(x^2+y^2+z^2)$

(3) $e^{x^2+y^3+z^4}$　　(4) $x^2y^3\log(x^2+y^3+z^4)$

(1) $\dfrac{\partial w}{\partial x} = 2xy^3z^4,\ \dfrac{\partial w}{\partial y} = 3x^2y^2z^4,\ \dfrac{\partial w}{\partial z} = 4x^2y^3z^3$

(2) $\dfrac{\partial w}{\partial x} = yz\sin(x^2+y^2+z^2) + 2x^2yz\cos(x^2+y^2+z^2)$,

$\dfrac{\partial w}{\partial y} = xz\sin(x^2+y^2+z^2) + 2xy^2z\cos(x^2+y^2+z^2)$,

$\dfrac{\partial w}{\partial z} = xy\sin(x^2+y^2+z^2) + 2xyz^2\cos(x^2+y^2+z^2)$

(3) $\dfrac{\partial w}{\partial x} = 2xe^{x^2+y^3+z^4},\ \dfrac{\partial w}{\partial y} = 3y^2e^{x^2+y^3+z^4},\ \dfrac{\partial w}{\partial z} = 4z^3e^{x^2+y^3+z^4}$

(4) $\dfrac{\partial w}{\partial x} = 2xy^3\log(x^2+y^3+z^4) + \dfrac{2x^3y^2}{x^2+y^3+z^4}$,

$\dfrac{\partial w}{\partial y} = 3x^2y^2\log(x^2+y^3+z^4) + \dfrac{3x^2y^5}{x^2+y^3+z^4}$,

$\dfrac{\partial w}{\partial z} = \dfrac{4x^2y^3z^3}{x^2+y^3+z^4}$

演習問題 2.9　次の場合に $\dfrac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)}$ 及び $\dfrac{D(u,v,w)}{D(x,y,z)}$ を求めよ。

(1) $x = v^2, y = w^2, z = u^2$　　(2) $x = u^2 - v^2 + w^2, y = 2uv, z = 2uw$

(3) $x = u\cos v, y = u\sin v, z = u + w$　　(4) $x = u, y = u+v, z = u+v+w$

(1)

$$\frac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)} = \begin{pmatrix} x_u & x_v & x_w \\ y_u & y_v & y_w \\ z_u & z_v & z_w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2v & 0 \\ 0 & 0 & 2w \\ 2u & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(1) のみ逆行列を求める計算を記す。ここでは線型代数の知識はないとして直接計算で求めている。線型代数において学んだ逆行列の求め方を知っているものは勿論それを用いて計算してよい。

逆行列を $B=\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ とおくと

$$\begin{pmatrix} 0 & 2\,v & 0 \\ 0 & 0 & 2\,w \\ 2\,u & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

となるので,a,b,c,d,e,f,g,h,i は連立 1 次方程式

$$2vd=1, 2ve=0, 2vf=0, 2wg=0, 2wh=1, 2wi=0, 2ua=0, 2ub=0, 2uc=1$$

の解なので，連立 1 次方程式を解くと

$$a=0, b=0, c=\frac{1}{2u}, d=\frac{1}{2v}, e=0, f=0, g=0, h=\frac{1}{2w}, i=0$$

が得られる (ここで $u\neq 0, v\neq 0, w\neq 0$ として計算した)。よって

$$\frac{D(u,v,w)}{D(x,y,z)}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dfrac{1}{2\,u} \\ \dfrac{1}{2\,v} & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{2\,w} & 0 \end{pmatrix}$$

である。

(2)

$$\frac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)}=\begin{pmatrix} x_u & x_v & x_w \\ y_u & y_v & y_w \\ z_u & z_v & z_w \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2u & -2v & 2w \\ 2v & 2u & 0 \\ 2w & tcr0 & 2u \end{pmatrix}$$

なので

$$\frac{D(u,v,w)}{D(x,y,z)}=\begin{pmatrix} \dfrac{u}{2(u^2+v^2-w^2)} & \dfrac{v}{2\,(u^2+v^2-w^2)} & -\dfrac{w}{2(u^2+v^2-w^2)} \\ -\dfrac{v}{2\,(u^2+v^2-w^2)} & \dfrac{u^2-w^2}{2u(u^2+v^2-w^2)} & -\dfrac{vw}{2u(u^2+v^2-w^2)} \\ -\dfrac{w}{2(u^2+v^2-w^2)} & -\dfrac{vw}{2u(u^2+v^2-w^2)} & \dfrac{u^2+v^2}{2u(u^2+v^2-w^2)} \end{pmatrix}$$

である。

(3)

$$\frac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)}=\begin{pmatrix} x_u & x_v & x_w \\ y_u & y_v & y_w \\ z_u & z_v & z_w \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \cos v & -u\,\sin v & 0 \\ \sin v & u\,\cos v & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

なので

$$\frac{D(u,v,w)}{D(x,y,z)}=\begin{pmatrix} \cos v & \sin v & 0 \\ -\dfrac{\sin v}{u} & \dfrac{\cos v}{u} & 0 \\ -\cos v & -\sin v & 1 \end{pmatrix}$$

である。

(4)

$$\frac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)} = \begin{pmatrix} x_u & x_v & x_w \\ y_u & y_v & y_w \\ z_u & z_v & z_w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

なので

$$\frac{D(u,v,w)}{D(x,y,z)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

である。

演習問題 2.10　次の関数に対し $\dfrac{\partial w}{\partial s}, \dfrac{\partial w}{\partial t}, \dfrac{\partial w}{\partial u}, \dfrac{\partial^2 w}{\partial s^2}, \dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \dfrac{\partial^2 w}{\partial u^2}, \dfrac{\partial^2 w}{\partial s \partial t}$ を求めよ。

(1) $w = x^3 + y^3 + z^3$,$x + y + z = s, xy + yz + zx = t, xyz = u$

(2) $w = x + y + z$,$x^2 + y^2 + z^2 = s, xyz = t, xy + yz + zx = u$

(1)

$$\frac{D(s,t,u)}{D(x,y,z)} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial s}{\partial x} & \dfrac{\partial s}{\partial y} & \dfrac{\partial s}{\partial z} \\ \dfrac{\partial t}{\partial x} & \dfrac{\partial t}{\partial y} & \dfrac{\partial t}{\partial z} \\ \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} & \dfrac{\partial u}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ y+z & z+x & x+y \\ yz & zx & xy \end{pmatrix}$$

なので

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial s} & \dfrac{\partial x}{\partial t} & \dfrac{\partial x}{\partial u} \\ \dfrac{\partial y}{\partial s} & \dfrac{\partial y}{\partial t} & \dfrac{\partial y}{\partial u} \\ \dfrac{\partial z}{\partial s} & \dfrac{\partial z}{\partial t} & \dfrac{\partial z}{\partial u} \end{pmatrix} = \frac{D(x,y,z)}{D(s,t,u)} = \left(\frac{D(s,t,u)}{D(x,y,z)}\right)^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} \dfrac{x^2}{(x-y)(x-z)} & -\dfrac{x}{(x-y)(x-z)} & \dfrac{1}{(x-y)(x-z)} \\ \dfrac{y^2}{(y-z)(y-x)} & -\dfrac{y}{(y-z)(y-x)} & \dfrac{1}{(y-z)(y-x)} \\ \dfrac{z^2}{(z-x)(z-y)} & -\dfrac{z}{(z-x)(z-y)} & \dfrac{1}{(z-x)(z-y)} \end{pmatrix}$$

となる。

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 3x^2, \quad \frac{\partial w}{\partial y} = 3y^2, \quad \frac{\partial w}{\partial z} = 3z^2$$

なので

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial w}{\partial s} &= \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial s} \\
&= 3x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 3xy + 3zx + 3yz \\
\frac{\partial w}{\partial t} &= \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t} \\
&= -3x - 3y - 3z \\
\frac{\partial w}{\partial u} &= \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial u} \\
&= 3
\end{aligned}
$$

となる。$X = \dfrac{\partial w}{\partial s}$ とおき，これに合成関数の微分法を適用すると

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 w}{\partial s^2} = \frac{\partial X}{\partial s} &= \frac{\partial X}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial X}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial X}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial s} \\
&= 6x + 6y + 6z
\end{aligned}
$$

が得られる。同様に計算して

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 w}{\partial s \partial t} &= \frac{\partial w_t}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial w_t}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial w_t}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial s} \\
&= -3 \\
\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= \frac{\partial w_t}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial w_t}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial w_t}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t} \\
&= 0 \\
\frac{\partial^2 w}{\partial u^2} &= \frac{\partial w_u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial w_u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial w_u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial u} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

(2)　この問題は x, y, z に関する対称式 (x, y, z を入れ換えても式が変わらない) に関係しているので，変数間に特殊な関係が存在する。ここではそのことを使って解く方法を紹介する。勿論 (1) と同様に方法で解いてもよい。

$$
\begin{aligned}
w^2 &= (x+y+z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + zx) \\
&= s + 2u
\end{aligned}
$$

が成立している。両辺を s で微分すると，

$$
\frac{\partial w^2}{\partial s} = \frac{\partial s}{\partial s} + 2\frac{\partial u}{\partial s}
$$

となる。s で微分するとき t, u は固定されているので

$$
\frac{\partial u}{\partial s} = 0, \quad \frac{\partial s}{\partial s} = 1
$$

である。$\dfrac{\partial w^2}{\partial s}=2w\dfrac{\partial w}{\partial s}$ なので $2w\dfrac{\partial w}{\partial s}=1$ より

$$\frac{\partial w}{\partial s}=\frac{1}{2w}=\frac{1}{2(x+y+z)}$$

となる。$w^2=s+2u$ を t で微分すると

$$\frac{\partial w^2}{\partial t}=\frac{\partial s}{\partial t}+2\frac{\partial u}{\partial t}$$

となる。$\dfrac{\partial s}{\partial t}=0,\ \dfrac{\partial u}{\partial t}=0$ より

$$\frac{\partial w}{\partial t}=0$$

となる。$w^2=s+2u$ を u で微分すると,

$$\frac{\partial w^2}{\partial u}=\frac{\partial s}{\partial u}+2\frac{\partial u}{\partial u}$$

となる。$\dfrac{\partial s}{\partial u}=0,\ \dfrac{\partial u}{\partial u}=1$ である。$\dfrac{\partial w^2}{\partial u}=2w\dfrac{\partial w}{\partial u}$ なので

$$\frac{\partial w}{\partial u}=\frac{1}{w}=\frac{1}{x+y+z}$$

となる。

$2ww_s=1$ の両辺を s で微分すると $2w_sw_s+2ww_{ss}=0$ を得るので

$$\begin{aligned}w_{ss}&=-\frac{w_s^2}{w}=-\frac{1}{w}\left(\frac{1}{2w}\right)^2\\&=-\frac{1}{4(x+y+z)^3}\end{aligned}$$

$w_t=0$ なので $w_{tt}=0,\ w_{ts}=0$ である。また $ww_u=1$ の両辺を u で微分すると $w_uw_u+ww_{uu}=0$ を得るので,

$$\begin{aligned}w_{uu}&=-\frac{w_u^2}{w}=-\frac{1}{w}\left(\frac{1}{w}\right)^2\\&=-\frac{1}{(x+y+z)^3}\end{aligned}$$

となる。

(1) の問題もここで紹介した方法を用いて計算できる。興味のあるものは試みよ。

演習問題 2.11 $x=r\sin\theta\cos\varphi,\ y=r\sin\theta\sin\varphi,\ z=r\cos\theta$ とする (3 次元の極座標表示)。関数 $w=f(x,y,z)$ に対し次を示せ。

(1) ヤコビアン $\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\varphi)}$ を計算せよ。

(2) $\left(\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial w}{\partial y}\right)^2+\left(\dfrac{\partial w}{\partial z}\right)^2=\left(\dfrac{\partial w}{\partial r}\right)^2+\left(\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial w}{\partial \theta}\right)^2+\left(\dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial w}{\partial \varphi}\right)^2$

(3) $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 w}{\partial z^2}=\dfrac{\partial^2 w}{\partial r^2}+\dfrac{2}{r}\dfrac{\partial w}{\partial r}+\dfrac{1}{r^2\sin\theta}\dfrac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\dfrac{\partial w}{\partial\theta}\right)+\dfrac{1}{r^2\sin^2\theta}\dfrac{\partial w}{\partial\varphi}$

3 次行列 $A=\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ に対しその行列式は

$$\det A = aei + dhc + gbf - gec - dbi - ahf$$

であるということは知っているとする。

(1)

$$\frac{D(x,y,z)}{D(r,\theta,\varphi)} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} & \dfrac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} & \dfrac{\partial y}{\partial \varphi} \\ \dfrac{\partial z}{\partial r} & \dfrac{\partial z}{\partial \theta} & \dfrac{\partial z}{\partial \varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{pmatrix}$$

なので

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\varphi)} = \det\left(\frac{D(x,y,z)}{D(r,\theta,\varphi)}\right) = r^2\sin\theta$$

となる。

(2)

$$\frac{D(w)}{D(r,\theta,\varphi)} = \frac{D(w)}{D(x,y,z)}\frac{D(x,y,z)}{D(r,\theta,\varphi)}$$

なので

$$\begin{aligned}
\frac{\partial w}{\partial r} &= \frac{\partial w}{\partial x}\sin\theta\cos\varphi + \frac{\partial w}{\partial y}\sin\theta\sin\varphi + \frac{\partial w}{\partial z}\cos\theta \\
\frac{\partial w}{\partial \theta} &= \frac{\partial w}{\partial x}r\cos\theta\cos\varphi + \frac{\partial w}{\partial y}r\cos\theta\sin\varphi - \frac{\partial w}{\partial z}r\sin\theta \\
\frac{\partial w}{\partial \varphi} &= -\frac{\partial w}{\partial x}r\sin\theta\sin\varphi + \frac{\partial w}{\partial y}r\sin\theta\cos\varphi
\end{aligned}$$

となる。

$$\begin{aligned}
\frac{\partial w}{\partial r} &= \frac{\partial w}{\partial x}\sin\theta\cos\varphi + \frac{\partial w}{\partial y}\sin\theta\sin\varphi + \frac{\partial w}{\partial z}\cos\theta \\
\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial \theta} &= \frac{\partial w}{\partial x}\cos\theta\cos\varphi + \frac{\partial w}{\partial y}\cos\theta\sin\varphi - \frac{\partial w}{\partial z}\sin\theta \\
\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial w}{\partial \varphi} &= -\frac{\partial w}{\partial x}\sin\varphi + \frac{\partial w}{\partial y}\cos\varphi
\end{aligned}$$

となるので，各式を 2 乗して加えると

$$\left(\frac{\partial w}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial \theta}\right)^2 + \left(\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial w}{\partial \varphi}\right)^2 = \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2$$

が成立する。

(3) $w_r = w_x x_r + w_y y_r + w_z z_r$ を r で微分して

$$\begin{aligned} w_{rr} &= (w_x)_r x_r + w_x x_{rr} + (w_y)_r y_r + w_y y_{rr} + (w_z)_r z_r + w_z z_{rr} \\ &= (w_{xx} x_r + w_{xy} y_r + w_{xz} z_r) x_r + w_x x_{rr} + (w_{yx} x_r + w_{yy} y_r + w_{yz} z_r) y_r \\ &\quad + w_y y_{rr} + (w_{zx} x_r + w_{zy} y_r + w_{zz} z_r) z_r + w_z z_{rr} \\ &= w_{xx} x_r^2 + w_{yy} y_r^2 + w_{zz} z_r^2 + 2 w_{xy} x_r y_r + 2 w_{yz} y_r z_r + 2 w_{xz} x_r z_r + w_x x_{rr} + w_y y_{rr} + w_z z_{rr} \end{aligned}$$

を得る。同様に $w_{\varphi\varphi}$,$(\sin\theta w_\theta)_\theta$ を計算し，$w_{rr} + \dfrac{2}{r} w_r + \dfrac{1}{r^2 \sin\theta} + (\sin\theta w_\theta)_\theta + \dfrac{1}{r^2 \sin^2\theta} w_{\varphi\varphi}$ の計算を実行すると求める式が得られる。