解析学 I 問題解説 #7

河野

演習問題 2.12　上でのべた事を証明せよ。即ち系を仮定して次を示せ。

(1) $z=f(x,y)$ が C^3 級ならば

$$z_{xxy}=z_{xyx}=z_{yxx},\quad z_{yyx}=z_{yxy}=z_{xyy}$$

が成立する。

(2) $z=f(x,y)$ が C^n 級ならば

$$z_{\cdots xy\cdots}=z_{\cdots yx\cdots}$$

が成立する。ただし $\cdots$ 部分は同じとし，微分は全部で n 回されるものとする。

(3) $z=f(x,y)$ が C^n 級ならば n 階の導関数は x,y で微分した回数が同じであればその順序によらず決る。

(1)　z が C^3 級のとき，z_x および z_y は C^2 級である。z_x に系を適用すると

$$z_{xxy}=\left(z_x\right)_{xy}=\left(z_x\right)_{yx}=z_{xyz}$$

が得られる。z_y に系を適用すると

$$z_{yxy}=\left(z_y\right)_{xy}=\left(z_y\right)_{yx}=z_{yyz}$$

z は C^3 級であるから，C^2 級でもある。よって系より $z_{xy}=z_{yx}$ が成立する。よって

$$z_{xyx}=\left(z_{xy}\right)_x=\left(z_{yx}\right)_x=z_{yxx}$$
$$z_{xyy}=\left(z_{xy}\right)_y=\left(z_{yx}\right)_y=z_{yxy}$$

となる。

(2)　α，β を x と y からなる列とする。ただし α は k 個の x,y から，β は $n-k-2$ 個の x,y からできているとする。ただし $k\leqq n-2$ とする。ここで証明すべきことは

$$z_{\alpha xy\beta}=z_{\alpha yx\beta}$$

である。

この表記方法が理解しずらい人のために例を書いておこう。例えば $\alpha=xxy$ で $\beta=yy$ だとすると，

$$\alpha xy\beta=xxyxyyy,\quad \alpha yx\beta=xxyyxyy$$

なので，$z_{\alpha xy\beta}=z_{\alpha yx\beta}$ は $z_{xxyxyyy}=z_{xxyyxyy}$ を意味する。

z_α は z を k 回微分したものなので C^{n-k} 級である。$n-k\geqq 2$ なので系が適用できる。このとき

$$\left(z_\alpha\right)_{xy}=\left(z_\alpha\right)_{yx}$$

が成立する。よって

$$z_{\alpha xy}=\left(z_\alpha\right)_{xy}=\left(z_\alpha\right)_{yx}=z_{\alpha yx}$$

が成立する。これより

$$z_{\alpha xy\beta} = \left(z_{\alpha xy}\right)_\beta = \left(z_{\alpha yx}\right)_\beta = z_{\alpha yx\beta}$$

の成立が示される。

(3)　γ を x と y からなる列で，x が k 個，y が $n-k$ 個からなるとする。ω を

$$\omega = \underbrace{x\cdots x}_{k\ 個}\underbrace{y\cdots y}_{n-k\ 個}$$

となる列とするとき

$$z_\gamma = z_\omega$$

を示せばよい。γ が $\cdots yx\cdots$ という部分列を含まなければ，$\gamma=\omega$ なので $z_\gamma = z_\omega$ が成立する。γ が $\cdots yx\cdots$ という部分列を含んだとする。$\gamma = \alpha yx\beta$ と表記したとき $\gamma_1 = \alpha xy\beta$ とおく。γ_1 が $\cdots yx\cdots$ という部分列を含まなければ $\gamma_1 = \omega$ となっている。γ_1 が $\cdots yx\cdots$ という部分列を含んだとする。$\gamma_1 = \alpha_1 yx\beta_1$ と表記したとき $\gamma_2 = \alpha_1 xy\beta_1$ とおく。このことを続けていくことにより列 $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_t$ が存在して $\gamma_t = \omega$ となることが分かる。(2) より任意の k に対し $z_{\gamma_k} = z_{\gamma_{k+1}}$ が成立するので

$$z_\gamma = z_{\gamma_1} = \cdots = z_{\gamma_t} = z_\omega$$

が成立する。

演習問題 2.13　次の関数を (a,b) において $n=3$ とし，剰余項を無視したテーラー展開を求めよ。

(1) $z = f(x,y) = (x-1)(y+2) \qquad (a,b) = (0,0)$

(2) $z = f(x,y) = \dfrac{1}{1-2x+3y} \qquad (a,b)=(0,0)$

(3) $z = f(x,y) = \sin(x+y) \qquad (a,b) = \left(\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$

$n=3$ で剰余項無視した式を D を用いずに書くと

$$f(a,b)+f_x(a,b)(x-a)+f_y(a,b)(y-b)+\frac{1}{2}\left\{f_{xx}(a,b)(x-a)^2+2f_{xy}(a,b)(x-a)(y-b)+f_{yy}(a,b)(y-b)^2\right\}$$

である。

(1)　$f_x = y+2, f_y = x-1, f_{xx} = 0, f_{yy} = 0, f_{xy} = 1$ なので

$$-2+2x-y+xy$$

となる。

(2)　$f_x = 2(1-2x+3y)^{-2}, f_y = -3(1-2x+3y)^{-2}, f_{xx} = 8(1-2x+3y)^{-3}, f_{xy} = -12(1-2x+3y)^{-3}, f_{yy} = 18(1-2x+3y)^{-3}$ なので

$$1+2x-3y+4x^2-12xy+9y^2$$

となる。

(3)　$f_x = f_y = \cos(x+y), f_{xx} = f_{xy} = f_{yy} = -\sin(x+y)$ なので

$$-\left(x-\frac{\pi}{2}\right)-\left(y-\frac{\pi}{2}\right)$$

となる。

演習問題 2.14　次の関数の極大・極小を求めよ。

(1) $z = x^2 - xy + y^2 - 2x + 3y + 1$　　(2) $z = x^2 - 5xy + 2y^2 + x - y - 3$

(3) $z = \dfrac{ax+by}{x^2+y^2+1}$ $(a \neq 0, b \neq 0)$　　(4) $z = e^{-(x^2+y^2)}(ax^2+by^2)$ $(a > b > 0)$

(1)　(1) 最初に臨界点を求める。$z_x = 2x - y - 2, z_y = -x + 2y + 3$ なので連立方程式 $z_x = 0, z_y = 0$ を解くと $x = \dfrac{1}{3}, y = -\dfrac{4}{3}$ が得られる。(2) 次にヘッシアンを計算する。$z_{xx} = 2, z_{yy} = 2, z_{xy} = -1$ なので $H(x,y) = 2^2 - (-1)^2 = 3 > 0, z_x > 0$ である。よって z は $\left(\dfrac{1}{3}, -\dfrac{4}{3}\right)$ で極小値 $-\dfrac{4}{3}$ をとる。

(2)　(1) 同様に計算すると $\left(-\dfrac{1}{17}, \dfrac{3}{17}\right)$ が臨界点であるが，$H(x,y) = -17 < 0$ である。臨界点が極値を与えないので極値は存在しない。

(3)　$z_x = \dfrac{a}{x^2+y^2+1} - \dfrac{2(ax+by)x}{(x^2+y^2+1)^2}$, $z_y = \dfrac{b}{x^2+y^2+1} - \dfrac{2(ax+by)y}{x^2+y^2+1}^2$ なので臨界点は連立方程式 $z_x = 0, z_y = 0$ の解である。$z_x = 0$ より $x = \dfrac{x^2+y^2+1}{2(ax+by)}a$ となる。また $z_y = 0$ より $y = \dfrac{x^2+y^2+1}{2(ax+by)}b$ となる。$k = \dfrac{x^2+y^2+1}{2(ax+by)}$ とおくと $x = ka, y = bk$ となる。これを $z_x(x^2+y^2+1) = a(x^2+y^2+1) - 2(ax+by)x = 0$ に代入して

$$a((a^2+b^2)k^2+1) - 2(a^2+b^2)ak^2 = 0$$

を得る。これを解くと $k = \pm\dfrac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}$ となるので，臨界点は

$$(x,y) = \left(\pm\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \pm\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$$

である。

$$H(x,y) = \begin{vmatrix} \dfrac{2(ax^3 - 3y^2ax - 3ax + 3byx^2 - by^3 - by)}{(x^2+y^2+1)^3} & \dfrac{2(3ayx^2 - ay^3 - ay - bx^3 + 3bxy^2 - bx)}{(x^2+y^2+1)^3} \\ \dfrac{2(3ayx^2 - ay^3 - ay - bx^3 + 3bxy^2 - bx)}{(x^2+y^2+1)^3} & -\dfrac{2(3byx^2 - by^3 + 3by - 3y^2ax + ax^3 + ax)}{(x^2+y^2+1)^3} \end{vmatrix}$$

となるが,

$$H\left(\pm\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \pm\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right) = \begin{vmatrix} \dfrac{\sqrt{s^2+b^2}}{2} & 0 \\ 0 & \dfrac{\sqrt{a^2+b^2}}{2} \end{vmatrix} = \frac{a^2+b^2}{4} > 0$$

なので $(x,y) = \left(\pm\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \pm\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$ は極大値を与える。極値は

$$z\left(\pm\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \pm\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right) = \frac{a^2+b^2}{a^2+b^2+1}$$

である。ここで $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$ という記法を使った。

(4) $z_x = -2xe^{-(x^2+y^2)}(ax^2+by^2) + 2e^{-(x^2+y^2)}ax,\ z_y = -2ye^{-(x^2+y^2)}(ax^2+by^2) + 2e^{-(x^2+y^2)}by$ なので連立方程式 $z_x = 0, z_y = 0$ を解くと (ここの計算は各自実行すること)

$$(x, y) = (0, 0), (0, \pm 1), (\pm 1, 0)$$

となる。

$$H(x, y) = \begin{vmatrix} 2e^{-(x^2+y^2)}(-5ax^2 - by^2 + 2x^4a + 2x^2by^2 + a) & 4xye^{-(x^2+y^2)}(ax^2 + by^2 - b - a) \\ 4xye^{-(x^2+y^2)}(ax^2 + by^2 - b - a) & 2e^{-(x^2+y^2)}(-ax^2 - 5by^2 + 2y^2ax^2 + 2y^4b + b) \end{vmatrix}$$

なので

$$\begin{aligned} H(0,0) &= \begin{vmatrix} 2a & 0 \\ 0 & 2b \end{vmatrix} = 4ab > 0 \\ H(0,1) &= \begin{vmatrix} \dfrac{2(a-b)}{e} & 0 \\ 0 & -\dfrac{4b}{e} \end{vmatrix} = -\frac{8(a-b)b}{e^2} < 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H(0,-1) &= \begin{vmatrix} \dfrac{2(a-b)}{e} & 0 \\ 0 & -\dfrac{4b}{e} \end{vmatrix} = -\frac{8(a-b)b}{e^2} < 0 \\ H(1,0) &= \begin{vmatrix} -\dfrac{4a}{e} & 0 \\ 0 & \dfrac{2(b-a)}{e} \end{vmatrix} = -\frac{8(b-a)a}{e^2} > 0 \\ H(-1,0) &= \begin{vmatrix} -\dfrac{4a}{e} & 0 \\ 0 & \dfrac{2(b-a)}{e} \end{vmatrix} = -\frac{8(b-a)a}{e^2} > 0 \end{aligned}$$

となる。よって z は $(x, y) = (0, 0)$ で極小値 $z(0,0) = 0$, $(x, y) = (\pm 1, 0)$ で極大値 $z(\pm 1, 0) = \dfrac{a}{e}$ をとる。

演習問題 2.15 次で与えられる陰関数に関し $\dfrac{dy}{dx}, \dfrac{d^2y}{dx^2}$ を求めよ。

(1) $1 - y + xe^y = 0$

(2) $x^3y^3 + y - x = 0$

(1) 式の両辺を x で微分すると

$$-y' + e^y + xe^y y' = 0 \tag{1}$$

となる。よって

$$y' = \frac{e^y}{1 - xe^y}$$

となる。式 (1) の両辺を x で微分すると

$$-y'' + 2e^y y' + xe^y (y')^2 + xe^y y'' = 0$$

となるので

$$y'' = \frac{e^{2y}(2 - xe^y)}{(1 - xe^y)^2}$$

となる。

(2)　式の両辺を x で微分すると

$$3x^2y^3 + 3x^3y^2y' + y' - 1 = 0 \tag{2}$$

となる。よって

$$y' = \frac{1 - 3x^2y^3}{1 + 3x^3y^2}$$

となる。式 (2) の両辺を x で微分すると

$$6xy^3 + 18x^2y^2y' + 6x^3y(y')^2 + 3x^3y^2y'' + y'' = 0$$

となるので

$$y'' = \frac{6xy(9x^6y^6 + 3x^3y^4 - y^2 - 3x^4y^3 - 3xy - x^2)}{(1 + 3x^3y^2)^3}$$

となる。