解析学 I 追加問題解説

河野

2.14 への追加問題　次の関数の極大・極小を求めよ。

(1) $z = x^3 + 2xy^2 - 3x^2 - 3y^2 - 1$　　(2) $z = x^3 - 3xy + y^3$

(3) $z = xy(x^2 + y^2 - 1)$　　(4) $z = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2$

(1)　最初に臨界点 ($z_x = 0$ かつ $z_y = 0$ となる点) を求める。

$$z_x = 3x^2 + 2y^2 - 6x, \quad z_y = 4xy - 6y$$

なので $z_y = 0$ より $y(2x-3) = 0$ となるので，$y = 0$ または $2x - 3 = 0$ となる。$y = 0$ のとき

$$z_x(x, 0) = 3x^2 + 2 \cdot 0^2 - 6x = 3x^2 - 6x = 0$$

を得る。よって $x = 0$ または $x = 2$ である。

$x = \dfrac{3}{2}$ のとき

$$z_x\left(\frac{3}{2}, y\right) = 3\left(\frac{3}{2}\right)^2 + 2y^2 - 6 \cdot \frac{3}{2} = 0$$

を得る。よって $y = \pm\dfrac{3}{2}\sqrt{\dfrac{1}{2}}$ である。以上により臨界点は

$$(x, y) = (0, 0), \quad (2, 0), \quad \left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}\right), \quad \left(\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}\right)$$

である。

$$z_{xx} = 6x - 6, \quad z_{xy} = 4y, \quad z_{yy} = 4x - 6$$

なので

$$H(x, y) = 12(x-1)(2x-3) - 16y^2$$

となる。よって

$$H(0,0) = 36 > 0, H(2,0) = 12 > 0, H\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}\right) = -18 < 0, H\left(\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}\right) = -18 < 0$$

となる。よって極値を与える (x, y) は $(0, 0)$ と $(2, 0)$ である。$z_{xx}(0, 0) = -6 < 0$，$z_{xx}(2, 0) = 6 > 0$ なので $(0, 0)$ では極大，$(2, 0)$ では極小である。

(2)　最初に臨界点 ($z_x = 0$ かつ $z_y = 0$ となる点) を求める。

$$z_x = 3x^2 - 3y, \quad z_y = -3x + 3y^2$$

なので $z_x = 0$ から $z_y = 0$ を引くことにより

$$\begin{aligned} 0 &= x^2 - y^2 - y + x = (x^2 - y^2) + (x - y) \\ &= (x-y)(x+y) + (x-y) \\ &= (x-y)(x+y+1) \end{aligned}$$

を得る。よって $x=y$ または $x+y=-1$ が成立する。

最初に $x+y=-1$ が成立している場合を考える。$y=-1-x$ を $x=y^2$ に代入すると，$x=(1+x)^2$ より $x^2+x+1=0$ を得る。この 2 次方程式は実数解を持たないので，この場合は解はない。よって $x=y$ が成立する。これをもとの方程式に代入すると $x=0,1$ が得られる。よって臨界点は

$$(x,y)=(0,0),\quad (1,1)$$

である。

$$z_{xx}=6x,\quad z_{xy}=-3,\quad z_{yy}=6y$$

なので

$$H(x,y)=36xy-9$$

となる。よって

$$H(0,0)=-9<0,\quad H(1,1)=27>0$$

となる。よって極値を与える (x,y) は $(x,y)=(1,1)$ である。$z_{xx}(1,1)=6>0$ なので $(1,1)$ で極小である。

(3) 最初に臨界点 ($z_x=0$ かつ $z_y=0$ となる点) を求める。

$$z_x=y(x^2+y^2-1)+2x^2y,\quad z_y=x(x^2+y^2-1)+2xy^2$$

なので $z_x=0$ から $z_y=0$ を引くことにより

$$\begin{aligned}0&=(y-x)(x^2+y^2-1)+2xy(x-y)=(y-x)(x^2+y^2-1)-2xy(y-x)\\&=(y-x)(x^2+y^2-1-2xy)=(y-x)\big((x-y)^2-1\big)\\&=(y-x)(x-y-1)(x-y+1)\end{aligned}$$

を得る。よって $x=y$ または $x-y-1=0$ または $x-y+1=0$ が成立する。

最初に $x=y$ が成立している場合を考える。

$$\begin{aligned}0=z_x(x,x)&=x(x^2+x^2-1)+2x^3=x(4x^2-1)\\&=x(2x-1)(2x+1)\end{aligned}$$

より $x=0$ または $x=\pm\dfrac{1}{2}$ となる。よってこの場合

$$(x,y)=(0,0),\quad \left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right),\quad \left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$$

である。

次に $x-y-1=0$ の場合を考える。$y=x-1$ なので

$$\begin{aligned}0=z_y(x,x-1)&=x\big(x^2+(x-1)^2-1\big)+2x(x-1)^2=x\big(x^2+(x-1)^2-1+2(x-1)^2\big)\\&=x(4x^2-6x+2)=2x(2x^2-3x+1)\\&2x(2x-1)(x-1)\end{aligned}$$

より $x=0$ または $x=\dfrac{1}{2}$ または $x=1$ となる。今の場合 $y=x-1$ なので

$$(x,y)=(0,-1),\quad \left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right),\quad (1,0)$$

である。

最後に次に $x-y+1=0$ の場合を考える。$y=x+1$ なので

$$\begin{aligned}0=z_y(x,x+1)&=x\bigl(x^2+(x+1)^2-1\bigr)+2x(x+1)^2=x\bigl(x^2+(x+1)^2-1+2(x+1)^2\bigr)\\&=x(4x^2+6x+2)=2x(2x^2+3x+1)\\&2x(2x+1)(x+1)\end{aligned}$$

より $x=0$ または $x=-\dfrac{1}{2}$ または $x=-1$ となる。今の場合 $y=x+1$ なので

$$(x,y)=(0,1),\quad \left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right),\quad (-1,1)$$

である。以上により臨界点は

$$(x,y)=(0,0),(0,\pm1),(\pm1,0),\left(\frac{1}{2},\pm\frac{1}{2}\right),\left(-\frac{1}{2},\pm\frac{1}{2}\right)$$

である。

$$z_{xx}=6xy,\quad z_{xy}=3x^2+3y^2-1,\quad z_{yy}=6xy$$

なので

$$H(x,y)=36x^2y^2-(3x^2+3y^2-1)^2$$

となる。よって

$$H(0,0)=-1<0,H(0,\pm1)=-4<0,H(\pm1,0)=-4<0,H\left(\frac{1}{2},\pm\frac{1}{2}\right)=2>0,H\left(-\frac{1}{2},\pm\frac{1}{2}\right)=2>0$$

となる。よって極値を与える (x,y) は $(x,y)=\left(\dfrac{1}{2},\pm\dfrac{1}{2}\right),\left(-\dfrac{1}{2},\pm\dfrac{1}{2}\right)$, である。

$$z_{xx}\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=z_{xx}\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)>0,\quad z_{xx}\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)=z_{xx}\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)<0$$

なので $\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right),\left(-\dfrac{1}{2},-\dfrac{1}{2}\right)$ で極小であり，$\left(\dfrac{1}{2},-\dfrac{1}{2}\right),\left(-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)$ で極大である。

(4)　最初に臨界点 ($z_x=0$ かつ $z_y=0$ となる点) を求める。

$$z_x=4x^3-4x+4y,\quad z_y=4y^3+4x-4y$$

なので $z_x=0$ と $z_y=0$ を加えて 4 で割ると

$$0=x^3+y^3=(x+y)+(x^2-xy+y^2)$$

を得る。よって $x+y=0$ または $x^2-xy+y^2=0$ が成立する。

最初に $x^2-xy+y^2=0$ が成立している場合を考える。

$$x^2-xy+y^2=\left(x-\frac{1}{2}y\right)^2+\frac{3}{4}y^2=0$$

より $x=0, y=0$ を得る。これは $z_x(0,0)=0, z_y(0,0)=0$ を満たしている。

次に $x+y=0$ の場合を考える。$y=-x$ を代入すると

$$\begin{aligned}0=z_x(x,-x)&=4x^3-4x-4x=4(x^3-2x)\\&=4x(x^2-2)=4x(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})\end{aligned}$$

より $x=0$ または $x=\sqrt{2}$ または $x=-\sqrt{2}$ となる。今の場合

$$(x,y)=(0,0),(\sqrt{2},-\sqrt{2}),(-\sqrt{2},\sqrt{2})$$

となる。以上により臨界点は

$$(x,y)=(0,0),(\sqrt{2},-\sqrt{2}),(-\sqrt{2},\sqrt{2})$$

である。

$$z_{xx}=12x^2-4,\quad z_{xy}=4,\quad z_{yy}=12y^2-4$$

なので

$$H(x,y)=16(3x^2-1)(3y^2-1)-16$$

となる。よって

$$H(0,0)=0,\quad H(\sqrt{2},-\sqrt{2})=H(-\sqrt{2},\sqrt{2})=384>0$$

となる。$z_{xx}(\sqrt{2},-\sqrt{2})=z_{xx}(-\sqrt{2},\sqrt{2})>0$ なので $(\sqrt{2},-\sqrt{2}),(-\sqrt{2},\sqrt{2})$ で極小である。

$(x,y)=(0,0)$ はこれだけではよく分からない。最初に $y=x$ 上での z の動きを見よう。$g(x)=z(x,x)$ とおくと

$$g(x)=2x^4$$

となるので $x=0$ で極小である。よって $(0,0)$ の十分近くの点 (x,y) で (今の場合 $y=x$ を満たしている)，$z(x,y)>z(0,0)$ となる点がある。

次に $y=-x$ 上での z の動きを見よう。$h(x)=z(x,-x)$ とおくと

$$h(x)=2x^4-8x^2$$

となる。$h(x)$ の増減表を書いて $x=0$ のまわりの状況を調べると，$y=-x$ 上では極大になっている。よって $(0,0)$ の十分近くの点 (x,y) で (今の場合 $y=-x$ を満たしている)，$z(x,y)<z(0,0)$ となる点がある。十分近くに $z(0,0)$ より大きい点も小さい点もあるので，z は $(0,0)$ で極値をとらない。

以上により $(x,y)=(\sqrt{2},-\sqrt{2})$ および $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$ で極小値をとる。