

演習問題 4.1 次の条件の下で微分方程式を立てよ。

- (1) 曲線  $y = f(x)$  上の点を  $P$  とする。 $P$  における法線が  $x$  軸と交わる点を  $N$ ,  $P$  から  $x$  軸へ下ろした垂線の足を  $Q$  とすると線分  $QN$  の長さが常に一定である。
- (2) 曲線  $y = f(x)$  上の点を  $P$  とする。 $P$  における接線が  $x$  軸と交わる点を  $S$ ,  $y$  軸と交わる点を  $T$  とすると点  $P$  は線分  $ST$  の中点である。
- (3) 空気中を落下する物体に働く空気の抵抗は速度の 2 乗に比例する。比例定数を  $k$ , 重力定数を  $g$  とする。速度を  $v$  とするとき  $v$  が満たすべき微分方程式を求めよ。

(1) 点  $P(x, y)$  における接線の方程式は  $Y = y'(X - x) + y$  なので, 法線の方程式は

$$Y = -\frac{1}{y'}(X - x) + y$$

である。 $N$  は法線上の点なので座標を  $(x_0, 0)$  とすると,  $0 = -\frac{1}{y'}(x_0 - x) + y$  が成立する。今  $x_0 - x$  が一定なのでこれを  $C$ (定数) とおくと微分方程式

$$y'y = C$$

を得る。

(2) 接線の方程式は (1) と同様で

$$Y = y'(X - x) + y$$

である。 $T$  の座標は  $(0, 2y)$  なので  $2y = y'(0 - x) + y$  が成立する。よって満たすべき微分方程式は

$$y'x + y = 0$$

である。

(3) 運動方程式は力を  $F$  加速度を  $a$  質量を  $m$  としたとき

$$F = ma$$

であった。下向きを正の方向にとると働く力は重力と空気の抵抗力なので,  $F = mg - kv^2$  となる。よって求める微分方程式は

$$mg - kv^2 = mv'$$

である。

演習問題 4.2 次の微分方程式を解け。

- |                             |                             |
|-----------------------------|-----------------------------|
| (1) $yy' + x = 0$           | (2) 演習問題 4.1 (1) で得られた微分方程式 |
| (3) 演習問題 4.1 (2) で得られた微分方程式 | (4) 演習問題 4.1 (3) で得られた微分方程式 |

ここは変数分離型で解く。

(1)  $y \frac{dy}{dx} + x = 0$  なので,  $ydy = -xdx$  となる。両辺を積分して,  $\int ydy = -\int xdx$  より  $\frac{1}{2}y^2 = -\frac{1}{2}x^2 + C$  を得る。よって

$$x^2 + y^2 = 2C$$

を得る。 $C < 0$  のとき式を満たす  $(x, y)$  は存在しない。また  $C = 0$  のときは  $(x, y) = (0, 0)$  のみが式を満たす。 $C > 0$  のとき  $r = \sqrt{2C}$  とおくと式は  $x^2 + y^2 = r^2$  となる。よって求める曲線は原点中心半径  $r$  の円である。

(2)  $y \frac{dy}{dx} = C$  より  $ydy = Cdx$  を積分して,  $\frac{1}{2}y^2 = Cx + C_1$  となる。よって

$$y = \pm \sqrt{2Cx + 2C_1}$$

を得る。

(3)  $x \frac{dy}{dx} + y = 0$  より  $\frac{1}{y}dy = -\frac{1}{x}dx$  を積分して,  $\log|y| = -\log|x| + C_1$  となる。 $C_1 = \log C$

とおくと,  $\log|y| = \log \frac{C}{|x|}$  となる。よって

$$y = \pm \frac{C}{x}$$

を得る。

(4)  $mg - kv^2 = m \frac{dv}{dt}$  より  $\frac{1}{g - \frac{k}{m}v^2} dv = dt$  となり,

$$\frac{1}{2\sqrt{g}} \left( \frac{1}{\sqrt{g} - \sqrt{\frac{k}{m}}v} + \frac{1}{\sqrt{g} + \sqrt{\frac{k}{m}}v} \right) dv = dt$$

と変形して積分すると,

$$\frac{1}{2\sqrt{g}} \left( \sqrt{\frac{m}{k}} \log \left( \sqrt{g} + \sqrt{\frac{k}{m}}v \right) - \sqrt{\frac{m}{k}} \log \left| \sqrt{g} - \sqrt{\frac{k}{m}}v \right| \right) = t + C_1$$

を得る。初期値を  $v = 0$  と考えると  $\sqrt{g} - \sqrt{\frac{k}{m}}v > 0$  と仮定できるので, 絶対値をはずして変形すると,

$$\log \left( \frac{\sqrt{g} + \sqrt{\frac{k}{m}}v}{\sqrt{g} - \sqrt{\frac{k}{m}}v} \right) = 2\sqrt{g} \sqrt{\frac{k}{m}} (t + C_1)$$

となるので,

$$\frac{\sqrt{g} + \sqrt{\frac{k}{m}}v}{\sqrt{g} - \sqrt{\frac{k}{m}}v} = \exp \left( 2\sqrt{g} \sqrt{\frac{k}{m}} (t + C_1) \right)$$

となる。よって

$$v = \sqrt{g} \sqrt{\frac{m}{k}} \frac{\exp\left(2\sqrt{g} \sqrt{\frac{k}{m}}(t + C_1)\right) - 1}{\exp\left(2\sqrt{g} \sqrt{\frac{k}{m}}(t + C_1)\right) + 1}$$

を得る。 $t \rightarrow \infty$ としたとき  $v \rightarrow \sqrt{g} \sqrt{\frac{m}{k}}$  となる。よってこの条件下では落下速度は  $\sqrt{g} \sqrt{\frac{m}{k}}$  を超えない。