

演習問題 1.1 次の関数の定積分を定義に基づいて求めよ。ただし次の公式を用いる必要があるかもしれない。

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}, \quad \sum_{k=1}^n k^3 = \left\{ \frac{n(n+1)}{2} \right\}^2, \quad \sum_{k=1}^n \sin kx = \frac{\cos \frac{x}{2} - \cos \left(n + \frac{1}{2} \right) x}{2 \sin \frac{x}{2}}$$

$$(1) \int_0^1 x dx$$

$$(2) \int_0^1 x^3 dx$$

$$(3) \int_0^{\pi/2} \sin x dx$$

(1) $\Delta_n = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ を区間 $[0, 1]$ の n 等分を与える分割とする。即ち, $x_i = \frac{i}{n}$ とする。 $y = x^3$ は $[0, 1]$ では単調増加関数なので, 小区間 $[x_{i-1}, x_i]$ では

$$m_i = \min \{ x \mid x_{i-1} \leq x \leq x_i \} = x_{i-1}, \quad M_i = \max \{ x \mid x_{i-1} \leq x \leq x_i \} = x_i$$

となる。また $\Delta x_i = x_i - x_{i-1} = \frac{1}{n}$ なので

$$\begin{aligned} s(\Delta_n) &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{i-1}{n} \right) \frac{1}{n} = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n (i-1) \\ &= \frac{1}{n^2} \frac{(n-1)n}{2} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{n} \right) \end{aligned}$$

となる。また

$$\begin{aligned} S(\Delta_n) &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{i}{n} \right) \frac{1}{n} = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n i \\ &= \frac{1}{n^2} \frac{n(n+1)}{2} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{n} \right) \end{aligned}$$

となる。 $\|\Delta_n\| = \frac{1}{n}$ なので $n \rightarrow \infty$ のとき $\|\Delta_n\| \rightarrow 0$ となる。 $\lim_{n \rightarrow \infty} s(\Delta_n) = \frac{1}{2} = \lim_{n \rightarrow \infty} S(\Delta_n)$ となるので, $y = x^3$ は $[0, 1]$ で積分可能であり,

$$\int_0^1 x dx = \frac{1}{2}$$

となる。

(2) $\Delta_n = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ を区間 $[0, 1]$ の n 等分を与える分割とする。即ち, $x_i = \frac{i}{n}$ とする。 $y = x^3$ は $[0, 1]$ では単調増加関数なので, 小区間 $[x_{i-1}, x_i]$ では

$$m_i = \min \{ x^3 \mid x_{i-1} \leq x \leq x_i \} = x_{i-1}^3, \quad M_i = \max \{ x^3 \mid x_{i-1} \leq x \leq x_i \} = x_i^3$$

となる。また $\Delta x_i = x_i - x_{i-1} = \frac{1}{n}$ なので

$$\begin{aligned} s(\Delta_n) &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{i-1}{n}\right)^3 \frac{1}{n} = \frac{1}{n^4} \sum_{i=1}^n (i-1)^3 \\ &= \frac{1}{n^4} \left\{ \frac{(n-1)n}{2} \right\}^2 = \frac{1}{4} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^2 \end{aligned}$$

となる。また

$$\begin{aligned} S(\Delta_n) &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{i}{n}\right)^3 \frac{1}{n} = \frac{1}{n^4} \sum_{i=1}^n i^3 \\ &= \frac{1}{n^4} \left\{ \frac{n(n+1)}{2} \right\}^2 = \frac{1}{4} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 \end{aligned}$$

となる。 $\|\Delta_n\| = \frac{1}{n}$ なので $n \rightarrow \infty$ のとき $\|\Delta_n\| \rightarrow 0$ となる。 $\lim_{n \rightarrow \infty} s(\Delta_n) = \frac{1}{4} = \lim_{n \rightarrow \infty} S(\Delta_n)$ となるので、 $y = x^3$ は $[0, 1]$ で積分可能であり、

$$\int_0^1 x^3 dx = \frac{1}{4}$$

となる。

(3) $\Delta_n = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ を区間 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ の n 等分を与える分割とする。即ち、 $x_i = \frac{\pi i}{2n}$ とする。 $y = \sin x$ は $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ では単調増加関数なので、小区間 $[x_{i-1}, x_i]$ では

$$m_i = \min \{ \sin x \mid x_{i-1} \leq x \leq x_i \} = \sin x_{i-1}, \quad M_i = \max \{ \sin x \mid x_{i-1} \leq x \leq x_i \} = \sin x_i$$

となる。また $\Delta x_i = x_i - x_{i-1} = \frac{\pi}{2n}$ なので

$$\begin{aligned} s(\Delta_n) &= \sum_{i=1}^n \sin \left(\frac{\pi(i-1)}{2n}\right) \frac{\pi}{2n} = \frac{\pi}{2n} \frac{\cos \frac{\pi}{4n} - \cos \left\{ \left(n - \frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{2n} \right\}}{2 \sin \frac{\pi}{4n}} \\ &= \frac{\frac{\pi}{4n}}{\sin \frac{\pi}{4n}} \left\{ \cos \frac{\pi}{4n} - \cos \left\{ \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4n} \right\} \right\} \end{aligned}$$

となる。また

$$\begin{aligned} S(\Delta_n) &= \sum_{i=1}^n \sin \left(\frac{\pi i}{2n}\right) \frac{\pi}{2n} = \frac{\pi}{2n} \frac{\cos \frac{\pi}{4n} - \cos \left\{ \left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{2n} \right\}}{2 \sin \frac{\pi}{4n}} \\ &= \frac{\frac{\pi}{4n}}{\sin \frac{\pi}{4n}} \left\{ \cos \frac{\pi}{4n} - \cos \left\{ \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4n} \right\} \right\} \end{aligned}$$

となる。 $\|\Delta_n\| = \frac{\pi}{2n}$ なので $n \rightarrow \infty$ のとき $\|\Delta_n\| \rightarrow 0$ となる。 $\lim_{n \rightarrow \infty} s(\Delta_n) = 1 = \lim_{n \rightarrow \infty} S(\Delta_n)$ となるので、 $y = \sin x$ は $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ で積分可能であり、

$$\int_0^{\pi/2} \sin x dx = 1$$

となる。