解析学 II 問題解説 #3

河野

演習問題 1.4　命題 1.15 を証明せよ。

(1) はすでに証明してあるので，(2) を示す。今 $\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{-a}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{a} f(x)dx$ が成立している。

$\int_{-a}^{0} f(x)dx$ において $t = -x$ と変数変換すると，$\dfrac{dx}{dt} = -1$ であり，$x : -a \to 0$ のとき $t : a \to 0$ となる。

$$\begin{aligned}\int_{-a}^{0} f(x)dx &= \int_{a}^{0} f(-t)\frac{dx}{dt}dt = \int_{a}^{0} -f(t)(-1)dt = \int_{a}^{0} f(t)dt \\ &= -\int_{0}^{a} f(t)dt = -\int_{0}^{a} f(x)dx\end{aligned}$$

なので $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$ が示される。

演習問題 1.5　次の定積分を微積分の基本定理を用いて計算せよ。

(1) $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{1}{x^2-4}dx$　　(2) $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{4x-3}{(x^2+1)(x-2)^2}dx$

(3) $\displaystyle\int_{0}^{1} x\sqrt{1-x^2}dx$　　(4) $\displaystyle\int_{0}^{1} \arctan x dx$

(5) $\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\sin^3 x - \sin x\right) dx$　　(6) $\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^3 x dx$

この積分はどれもそれほど難しくはない。不定積分で学んだことが身についているかの確認のつもりで解いて見る事。いずれの関数も積分区間で連続なので微積分の基本定理を使える。

(1) $\dfrac{1}{x^2-4} = \dfrac{1}{4}\dfrac{1}{x-2} - \dfrac{1}{4}\dfrac{1}{x+2}$ と部分分数展開できる。

$$\begin{aligned}\int_{0}^{1} \frac{1}{x^2-4}dx &= \frac{1}{4}\int_{0}^{1} \frac{1}{x-2}dx - \frac{1}{4}\int_{0}^{1} \frac{1}{x+2}dx \\ &= \frac{1}{4}\Big[\log|x-2|\Big]_{0}^{1} - \frac{1}{4}\Big[\log|x+2|\Big]_{0}^{1} \\ &= \frac{1}{4}\big(\log 1 - \log 2\big) - \frac{1}{4}\big(\log 3 - \log 2\big) = -\frac{1}{4}\log 3\end{aligned}$$

(2) $\dfrac{4x-3}{(x^2+1)(x-2)^2} = \dfrac{1}{(x-2)^2} - \dfrac{1}{1+x^2}$ と部分分数展開できる。

$$\begin{aligned}\int_{0}^{1} \frac{4x-3}{(x^2+1)(x-2)^2}dx &= \int_{0}^{1} \frac{1}{(x-2)^2}dx - \int_{0}^{1} \frac{1}{1+x^2}dx \\ &= -\left[\frac{1}{x-2}\right]_{0}^{1} - \Big[\arctan x\Big]_{0}^{1}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= 1-\frac{1}{2}-\left(\arctan 1-\arctan 0\right) \\
&= \frac{1}{2}-\frac{\pi}{4}
\end{aligned}
$$

(3) 置換積分法を用いる。$t=1-x^2$ とおくと，$\dfrac{dt}{dx}=-2x$ なので，$\dfrac{dx}{dt}=-\dfrac{1}{2x}$ である。また x が $x:0\to 1$ と変化するとき，t は $t:1\to 0$ と変化する。よって

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 x\sqrt{1-x^2}dx &= \int_1^0 x\sqrt{t}\frac{dx}{dt}dt=\int_1^0 x\sqrt{t}\left(-\frac{1}{2x}\right)dt=-\frac{1}{2}\int_1^0\sqrt{t}dt \\
&= \frac{1}{2}\int_0^1\sqrt{t}dt=\frac{1}{2}\left[\frac{2}{3}t^{3/2}\right]_0^1=\frac{1}{3}
\end{aligned}
$$

(4) 部分積分法を用いる。$t=\arctan x$ は「$x=\tan t$ かつ $-\dfrac{\pi}{2}<t<\dfrac{\pi}{2}$」と同値であるから，$\arctan 0=0, \arctan 1=\dfrac{\pi}{4}$ である。$(\arctan x)'=\dfrac{1}{1+x^2}$, $x'=1$ である事に注意する。

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 \arctan x dx &= \int_0^1 x'\arctan x dx \\
&= \Big[x\arctan x\Big]_0^1-\int_0^1 x\left(\arctan x\right)' dx \\
&= \arctan 1-0\arctan 0-\int_0^1\frac{x}{1+x^2}dx \\
&= \frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\int_0^1\frac{(1+x^2)'}{1+x^2}dx \\
&= \frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\int_1^2\frac{1}{u}du \\
&= \frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\Big[\log u\Big]_0^1=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\log 2
\end{aligned}
$$

(5) $f(x)=\sin^3 x-\sin x$ とおくと $f(-x)=\sin^3(-x)-\sin(-x)=(-1)^3\sin^3-(-1)\sin x=-\left(\sin^3 x-\sin x\right)=-f(x)$ なので，$f(x)$ は奇関数である。よって $\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\sin^3 x-\sin x dx=0$ である。

(6) $f(x)=\cos^3 x$ とおくと $f(-x)=\cos^3(-x)=\cos^3 x=f(x)$ なので，$f(x)$ は偶関数である。

$$
\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^3 x dx = 2\int_0^{\pi/2}\cos^3 x dx=2\int_0^{\pi/2}\left(1-\sin^2 x\right)\cos x dx
$$

なので，$t=\sin x$ とおくと，$\dfrac{dt}{dx}=\cos x$ より $\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{1}{\cos x}$ となる。$x:0\to\dfrac{\pi}{2}$ のとき $t:0\to 1$ なので

$$
\begin{aligned}
2\int_0^{\pi/2}\left(1-\sin^2 x\right)\cos x dx &= 2\int_0^1(1-t^2)\cos x\frac{1}{\cos x}dt \\
&= 2\int_0^1\left\{1-t^2\right\}dt \\
&= 2\left[t-\frac{1}{3}t^3\right]_0^1=\frac{4}{3}
\end{aligned}
$$