

演習問題 1.6 次の広義積分が収束するときは値を求めよ。

$$(1) \int_{-\infty}^0 e^x dx \qquad (2) \int_1^{\infty} \frac{1}{x(x+1)} dx$$

$$(3) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{4+x^2} dx \qquad (4) \int_0^{\infty} \cos x dx$$

(1) $I(N) = \int_N^0 e^x dx$ とおくと,

$$I(N) = \int_N^0 e^x dx = \left[e^x \right]_N^0 = 1 - e^N$$

となる。 $\lim_{N \rightarrow -\infty} I(N) = 1 - \lim_{N \rightarrow -\infty} e^N = 1$ なので,

$$\int_{-\infty}^0 e^x dx = 1$$

である。

(2) $I(M) = \int_1^M \frac{1}{x(x+1)} dx$ とおくと

$$\begin{aligned} I(M) &= \int_1^M \frac{1}{x(x+1)} dx = \int_1^M \left\{ \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \right\} dx \\ &= \left[\log x - \log(x+1) \right]_1^M = \log M - \log(M+1) - \log 1 + \log 2 \\ &= \log \frac{M}{M+1} + \log 2 \end{aligned}$$

となる。

$$\begin{aligned} \lim_{M \rightarrow \infty} I(M) &= \lim_{M \rightarrow \infty} \log \frac{M}{M+1} + \log 2 \\ &= \log \left(\lim_{M \rightarrow \infty} \frac{M}{M+1} \right) + \log 2 \\ &= \log 1 + \log 2 = \log 2 \end{aligned}$$

なので $\int_1^{\infty} \frac{1}{x(x+1)} dx = \log 2$ である。

(3) $I(M) = \int_0^M \frac{1}{4+x^2} dx$, $J(N) = \int_N^0 \frac{1}{4+x^2} dx$ とおく。 $t = \arctan \frac{x}{2}$ とおくと, $\frac{dt}{dx} = \frac{2}{4+x^2}$ であり, $\frac{dx}{dt} = \frac{4+x^2}{2}$ となる。 $T = \arctan \frac{M}{2}$ とおくと, $x: 0 \rightarrow M$ のとき $t: 0 \rightarrow T$

となる。よって

$$\begin{aligned} I(M) &= \int_0^M \frac{1}{4+x^2} dx = \int_0^T \left[\frac{1}{4+x^2} \frac{dx}{dt} \right] dt \\ &= \int_0^T \frac{1}{4+x^2} \frac{4+x^2}{2} dt = \int_0^T \frac{1}{2} dt = \frac{T}{2} \end{aligned}$$

となる。 $M \rightarrow \infty$ のとき $T \rightarrow \frac{\pi}{2}$ となるので $\lim_{M \rightarrow \infty} I(M) = \frac{\pi}{4}$ となる。 $J(N)$ も同様に計算する

と $\lim_{N \rightarrow -\infty} J(N) = \frac{\pi}{4}$ が分かる。よって

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \lim_{M \rightarrow \infty} I(M) + \lim_{N \rightarrow -\infty} J(N) = \frac{\pi}{2}$$

となる。

(4) $I(M) = \int_0^M \cos x dx$ とおくと, $I(M) = \left[\sin x \right]_0^M = \sin M$ となる。 $\lim_{M \rightarrow \infty} I(M) = \lim_{M \rightarrow \infty} \sin M$ は収束しない。よって広義積分は収束しない。

演習問題 1.7 半径 r の球の体積を求めよ。

半径 r の球の表面は $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ ($-r \leq x \leq r$) を x 軸のまわりに 1 回転させたものである。球と平面 $x = a$ ($-r \leq a \leq r$) の共通部分の円の面積は $S(a) = \pi(\sqrt{r^2 - x^2})^2$ なので

$$\begin{aligned} V &= \int_{-r}^r S(x) dx \\ &= \pi \int_{-r}^r (\sqrt{r^2 - x^2})^2 dx = \pi \int_{-r}^r (r^2 - x^2) dx \\ &= \pi \left[r^2 x - \frac{1}{3} x^3 \right]_{-r}^r \\ &= \frac{4}{3} r^3 \end{aligned}$$

となる。

演習問題 1.8 $y = x^2$ と $y = 5x$ にはさまれる領域の面積を求めよ。またこの領域を x 軸の周りに回転してできる回転体の体積を求めよ。

図は次ページ。 曲線 $y = x^2$ と曲線 $y = 5x$ の交点の x 座標は $x = 0, 5$ である。この範囲では $5x \geq x^2$ なので求める面積を S とすると,

$$S = \int_0^5 (5x - x^2) dx = \left[\frac{5}{2} x^2 - \frac{1}{3} x^3 \right]_0^5 = \frac{125}{6}$$

となる。この領域を x 軸のまわりに回転させた回転体の体積を V とする。

領域 $R_1 = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 5, 0 \leq y \leq 5x \}$ を x 軸のまわりに回転させた回転体の体積を

V_1 , 領域 $R_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 5, 0 \leq y \leq x^2\}$ を x 軸のまわりに回転させた回転体の体積を V_2 とすると, $V = V_1 - V_2$ である。

$$V_1 = \pi \int_0^5 (5x)^2 dx = 25\pi \left[\frac{1}{3}x^3 \right]_0^5 = \frac{3125\pi}{3}$$

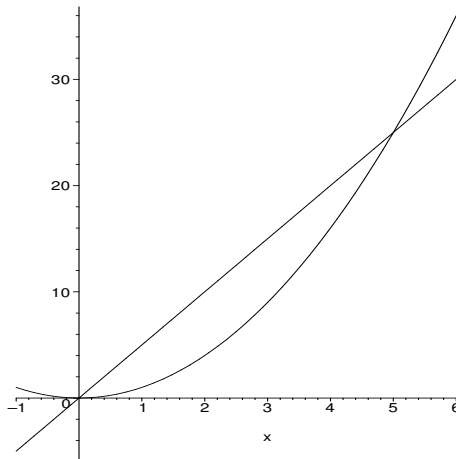
であり,

$$V_2 = \pi \int_0^5 (x^2)^2 dx = \pi \left[\frac{1}{5}x^5 \right]_0^5 = 625\pi$$

なので,

$$V = V_1 - V_2 = \frac{1250\pi}{3}$$

となる。



演習問題 1.9 「(仕事)=(力) \times (移動距離)」という関係がある。バネが x 伸ばされたとき働く力は k を比例定数とすると, $F = kx$ であった。バネを x 伸ばすのに必要な仕事を求めよ。

仕事を W とすると

$$W = \int_0^x kx dx = \left[\frac{k}{2}x^2 \right]_0^x = \frac{k}{2}x^2$$

となる。

演習問題 1.10 速度 V で走っている質量 M の車が等加速度運動 (等減速度運動と言うべきか) して停止した。このとき車を止めるために必要な仕事の量を M と V を用いて表せ。次は少し難しい問題, * 付きと考えること: 等加速度運動でない場合に関しても, 仕事の量を計算せよ。結果的には前と同じ答えになる。

等加速度 (減速度) 運動で T 秒後に停止したとすると, t 秒後の車の速度 v は $v = V - \frac{V}{T}t$ である。加速度 α は

$$\alpha = \frac{dv}{dt} = -\frac{V}{T}$$

である。このとき働いている力 F は $F = -M\alpha$ より $F = \frac{MV}{T}$ となる。移動距離 L は

$$L = \int_0^T v dt = \int_0^T \left\{ V - \frac{V}{T}t \right\} dt = \left[Vt - \frac{V}{2T}t^2 \right]_0^T = \frac{VT}{2}$$

となる。よって仕事量 W は

$$W = FL = \frac{MV}{T} \frac{VT}{2} = \frac{1}{2}MV^2$$

となる。

次に等加速度運動ではなく、速度が適当に変化しながら T 秒後に停止したとする。 t 秒後の速度を $v(t)$ とする。 t 秒後の位置を $\ell = \ell(t)$ とすると、 $\frac{d\ell}{dt} = v$ が成立している。また T 秒後の位置を L とする。加速度は $\alpha = \frac{dv}{dt}$ である。 $W = \int_0^L [d\ell - M\alpha]$ であるが、変数 t に変数変換し、さらに v に変数変換する。

$$\begin{aligned} \int_0^L \{-M\alpha\} d\ell &= -\int_0^T M \frac{dv}{dt} \frac{d\ell}{dt} dt \\ &= -\int_0^T M \frac{dv}{dt} v dt \\ &= -\int_V^0 M v dv = \int_0^V M v dv \\ &= \left[\frac{1}{2} M v^2 \right]_0^V = \frac{1}{2} M V^2 \end{aligned}$$

となり、どのように変化しながら停止しても、等加速度運動の場合と等しいことがわかる。

演習問題 1.11 一様な密度の半円板 $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1, y \geq 0\}$ の重心の座標を求めよ。

$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1, y \geq 0\}$ とおき、 D の重心を (X_G, Y_G) とすると、半円板は y 軸に関して対称なので $X_G = 0$ と考えられる。 $D(t) = D \cap \{(x, t) \in \mathbb{R}^2 \mid -\infty < x < \infty\}$ とおく。 $D(t)$ の部分の質量がすべて点 $(0, t)$ にあると考える。 $D(t)$ の長さは $2\sqrt{1-t^2}$ なので、 y 軸の $0 \leq y \leq 1$ の部分に置かれている銅線で y 座標が t の点における密度が $\mu(t) = 2\sqrt{1-t^2}$ であるような銅線の重心の位置が Y_G になる。質量 K は

$$K = \int_0^1 2\sqrt{1-t^2} dx$$

で与えられる。 $t = \sin u$ において変数変換を行うと $K = \frac{\pi}{2}$ が分かる。またモーメント M は

$$M = \int_0^1 2t\sqrt{1-t^2} dx$$

で与えられる。 $u = 1 - t^2$ において変数変換を行うと $M = \frac{2}{3}$ となる。重心 Y_G は $Y_G K = M$ と

なるので、 $Y_G = \frac{4}{3\pi}$ となる。

演習問題 1.12 一様な密度の材質でできている高さ h の円錐の重心は底面からどれくらいの所にあるか。

円錐の底面の半径を r とする。円錐を、円錐の頂点が原点にあり、底面が $y-z$ 平面に平行で x 軸の正の部分に来るようにおく。円錐と平面 $x = t$ の共通部分の面積は $\frac{\pi r^2}{h^2} t^2$ なので前問と同様に考えると、線密度 $\mu(x) = \frac{\pi r^2}{h^2} x^2$ の銅線が $0 \leq x \leq h$ にあり、その重心が円錐の重心の位置を与えると考えてよい。質量を K とすると、

$$K = \int_0^h \mu(x) dx = \int_0^h \frac{\pi r^2}{h^2} x^2 dx = \left[\frac{\pi r^2}{3h^2} x^3 \right]_0^h = \frac{\pi}{3} r^2 h$$

となる。またモーメント M は

$$M = \int_0^h x \mu(x) dx = \int_0^h \frac{\pi r^2}{h^2} x^3 dx = \left[\frac{\pi r^2}{4h^2} x^4 \right]_0^h = \frac{\pi}{4} r^2 h^2$$

となる。よって重心の位置を X_G とすると、 $X_G M = K$ なので $X_G = \frac{3}{4} h$ となる。底面は $x = h$ にあるので、重心は高さの $\frac{1}{4}$ の所にある事が分かる。

演習問題 *1.13 $(x(t), y(t))$ ($t_0 \leq t \leq t_1$) が閉曲線するとき、即ち $(x(t_0), y(t_0)) = (x(t_1), y(t_1))$ のとき、この閉曲線で囲まれる部分の面積 S は

$$S = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} \{x(t)y'(t) - x'(t)y(t)\} dt = \int_{t_0}^{t_1} x(t)y'(t) dt$$

である事を示せ。

部分積分法を用いると

$$-\int_{t_0}^{t_1} x'(t)y(t) dt = -\left[x(t)y(t) \right]_{t_0}^{t_1} + \int_{t_0}^{t_1} x(t)y'(t) dt$$

となる。ここで $x(t_0) = x(t_1), y(t_0) = y(t_1)$ より $\left[x(t)y(t) \right]_{t_0}^{t_1} = x(t_1)y(t_1) - x(t_0)y(t_0) = 0$ となるので、 $-\int_{t_0}^{t_1} x'(t)y(t) dt = \int_{t_0}^{t_1} x(t)y'(t) dt$ となる。よって

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} \{x(t)y'(t) - x'(t)y(t)\} dt \\ &= \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} x(t)y'(t) dt - \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} x'(t)y(t) dt \\ &= \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} x(t)y'(t) dt + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} x(t)y'(t) dt \\ &= \int_{t_0}^{t_1} x(t)y'(t) dt \end{aligned}$$

を得る。

演習問題 1.14 $r = f(\theta) = 1 + \cos \theta$ と極座標表示されている曲線を心臓形 (cardioid) という。これについて次の問に答えよ。

- (1) この曲線の概形を書け。
- (2) この曲線によって囲まれる部分の面積を求めよ。

[曲線の概形は解析学 I で学んだ] $r = f(\theta)$ と極座標表示されている点を x, y 座標で表現した点を $\vec{x}(\theta)$ で表し, $\vec{x}(\theta) = (x(\theta), y(\theta))$ とする。 $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$ の関係があるので, $x(\theta) = (1 + \cos \theta) \cos \theta, y(\theta) = (1 + \cos \theta) \sin \theta$ となっている。 $\cos \theta, \sin \theta$ は周期 2π の周期関数なので, $0 \leq \theta \leq 2\pi$ の範囲で曲線を描けばよい。また $(x(2\pi - \theta), y(2\pi - \theta)) = (x(\theta), -y(\theta))$ の関係があるので, $0 \leq \theta \leq \pi$ に対応する部分と $\pi \leq \theta \leq 2\pi$ に対応する部分は x 軸に関して対称である。よって $0 \leq \theta \leq \pi$ の部分を描いて, x 軸に関して折り返せば, 全体の曲線が得られる。

$x'(\theta) = -\sin \theta(1 + 2 \cos \theta), y'(\theta) = 2 \cos^2 \theta + \cos \theta - 1$ となる。 $x'(\theta) = 0$ のとき $\theta = 0, \frac{2\pi}{3}$ である。 $y'(\theta) = 0$ のとき $\theta = \frac{\pi}{3}, \pi$ である。よって増減表は以下の様になる。

	0		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{2\pi}{3}$		π
x'	0	-	-	-	0	+	0
x		←	←	←		→	
y'	+	+	0	-	-	-	0
y	↑	↑		↓	↓	↓	0
曲線	↑	↖	←	↙	↓	↘	

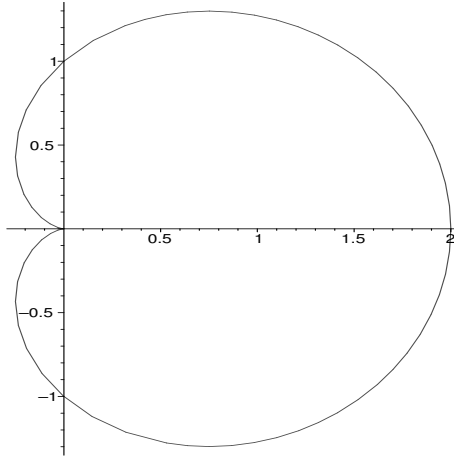
これで概形が分かるが, 1 つ問題がある。 $\vec{x}'(\theta) = (x'(\theta), y'(\theta)) = (0, 0)$ となる点を特異点と呼ぶが, 特異点では $x(\theta), y(\theta)$ が滑らかであっても, 曲線が尖る場合がある。そのチェックは解析学 I の講義では触れていない。特異点のまわりも含めきちんと曲線を描く問題は範囲外とするが, ここではそれに関しても述べておく。範囲外という事が分かる様に青字で書いておく。

$\theta = \pi$ が特異点を与える。 $\vec{x}'(\theta)$ において $\theta \rightarrow \pi$ とした時の $\vec{x}'(\theta)$ の方向を見ればよいが, $\theta \rightarrow \pi$ としたとき長さが 0 になるので長さを修正し, $\frac{\vec{x}'(\theta)}{|\vec{x}'(\theta)|}$ の方向を考える。 $\vec{x}'(\theta) = (x'(\theta), y'(\theta)) = (-\sin \theta(1 + 2 \cos \theta), 2 \cos^2 \theta + \cos \theta - 1)$ なので, $|\vec{x}'(\theta)|^2 = (x'(\theta))^2 + (y'(\theta))^2 = 2(1 + \cos \theta)$ となり,

$$\frac{\vec{x}'(\theta)}{|\vec{x}'(\theta)|} = \left(\frac{-\sin \theta(1 + 2 \cos \theta)}{\sqrt{2(1 + \cos \theta)}}, \frac{(2 \cos \theta - 1)\sqrt{1 + \cos \theta}}{\sqrt{2}} \right)$$

が得られる。 $\theta \rightarrow \pi$ のとき $\frac{(2 \cos \theta - 1)\sqrt{1 + \cos \theta}}{\sqrt{2}} \rightarrow 0$ なので $\frac{-\sin \theta(1 + 2 \cos \theta)}{\sqrt{2(1 + \cos \theta)}} \rightarrow 1$ となる。

よって極限では \vec{x}' は x 軸と平行になっている。この事を考慮して図を描くと次図の様になる。



(2) $r = f(\theta)$ と表されているときの面積を求める式を用いると

$$\begin{aligned}
 S &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} f(\theta)^2 d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (1 + \cos \theta)^2 d\theta \\
 &= \int_0^{2\pi} \left\{ 1 + 2 \cos \theta + \frac{1 + \cos(2\theta)}{2} \right\} d\theta \\
 &= \frac{3\pi}{2}
 \end{aligned}$$

となる。一般のパラメータ表示の面積を求める式を用いてもよい。この場合命題 4.14 を考慮すると

$$\begin{aligned}
 S &= \int_0^{2\pi} x(\theta)y'(\theta)d\theta \\
 &= \int_0^{2\pi} (1 + \cos \theta)(2 \cos^2 \theta + \cos \theta - 1)d\theta = \frac{3\pi}{2}
 \end{aligned}$$

となる。

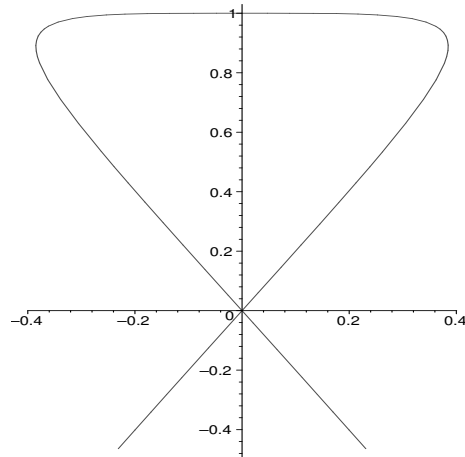
演習問題 1.15 $x = x(t) = t - t^3, y = y(t) = 1 - t^4$ でパラメータ表示された曲線について次の問に答えよ。

- (1) この曲線の概形を書け。
- (2) この曲線によって囲まれる部分の面積を求めよ。

(1) $x'(t) = 1 - 3t^2, y'(t) = -4t^3$ なので $t = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$ のとき $x'(t) = 0$, $t = 0$ のとき $y'(t) = 0$ となる。よって増減表は次のようになる。

		$-\frac{1}{\sqrt{3}}$		0		$\frac{1}{\sqrt{3}}$	
x'	-	0	+	+	+	0	-
x	←		→	→	→		←
y'	+	+	+	0	-	-	-
y	↑	↑	↑	0	↓	↓	↓
曲線	↖	↑	↗	→	↘	↓	↙

これより曲線を描くと次図の様になる。



(2) 閉曲線になっているのは $t = -1$ から $t = 1$ の範囲である。 t が -1 から 1 へ動くとき、点 $(x(t), y(t))$ は領域の境界を時計回りに動く。よって求める面積を S とするとき、演習問題 4.14 を考慮すると

$$S = \int_1^{-1} (t - t^3)(-4t^3)dt$$

となる。この積分を計算して $S = \frac{16}{35}$ を得る。

ここでは点の方向を注意して 1 から -1 までの積分とした。方向に注意せず、例えば

$$\int_{-1}^1 (t - t^3)(-4t^3)dt$$

を計算してもよい。その場合計算結果がマイナスになるので、 t が -1 から 1 まで動くとき、点が半時計回り移動している事が分かる。求めた積分値の符号を変えたものが面積になる。

演習問題 1.16 演習問題 1.14 の曲線の長さを求めよ。

演習問題 1.14 で計算している様に

$$\begin{aligned} \vec{x}'(\theta) &= (x'(\theta), y'(\theta)) = (-\sin \theta(1 + 2 \cos \theta), 2 \cos^2 \theta + \cos \theta - 1) \\ |\vec{x}'(\theta)|^2 &= (x'(\theta))^2 + (y'(\theta))^2 = 2(1 + \cos \theta) \end{aligned}$$

なので曲線の長さを L とすると

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{2(1 + \cos \theta)} d\theta$$

となる。 $\cos \theta = 2 \cos^2 \frac{\theta}{2} - 1$ なので

$$\begin{aligned} L &= \int_0^{2\pi} \sqrt{4 \cos^2 \frac{\theta}{2}} d\theta = \int_0^{2\pi} 2 \left| \cos \frac{\theta}{2} \right| d\theta = 4 \int_0^{\pi} \left| \cos \frac{\theta}{2} \right| d\theta \\ &= 4 \int_0^{\pi} \cos \frac{\theta}{2} d\theta = 4 \left[2 \sin \frac{\theta}{2} \right]_0^{\pi} = 8 \end{aligned}$$

となる。 $\cos \frac{\theta}{2}$ は負の場合もあるので積分区間が 0 から 2π のときに $\sqrt{4 \cos^2 \frac{\theta}{2}} = 2 \cos \frac{\theta}{2}$ と変形しないように。

演習問題 1.17 極座標表示された曲線 $r = f(\theta) = \sin^3 \frac{\theta}{3}$ の概形を書き，全長を求めよ。

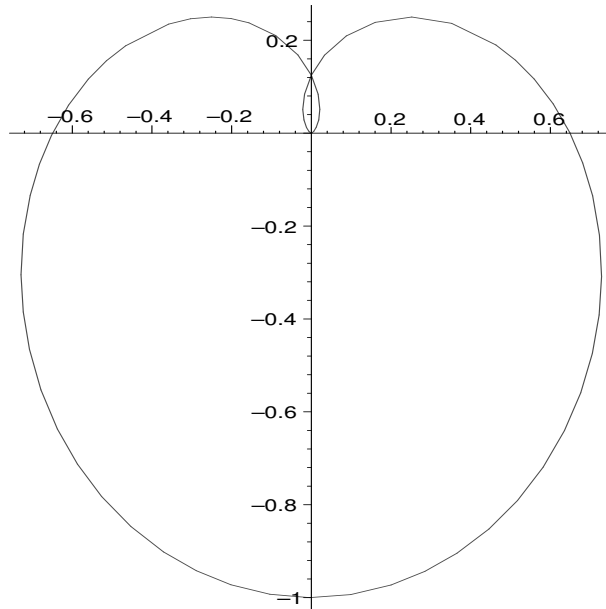
$r = f(\theta)$ と極座標表示されている点を x, y 座標で表現した点を $\vec{x}(\theta)$ で表し， $\vec{x}(\theta) = (x(\theta), y(\theta))$ とする。 $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$ の関係があるので， $x(\theta) = \sin^3 \left(\frac{\theta}{3} \right) \cos \theta, y(\theta) = \sin^3 \left(\frac{\theta}{3} \right) \sin \theta$ となっている。 $\cos \theta, \sin \theta$ は周期 2π の周期関数なので， $\sin \left(\frac{\theta}{3} \right)$ は周期 6π の周期関数である。 また $(x(3\pi + \theta), y(3\pi + \theta)) = (x(\theta), y(\theta))$ の関係があるので， $0 \leq \theta \leq 3\pi$ の範囲で曲線を描けばよい。 導関数を計算すると

$$\begin{aligned} x'(\theta) &= 3 \sin^2 \frac{\theta}{3} \cos \frac{\theta}{3} \cdot \frac{1}{3} \cos \theta + \sin^3 \frac{\theta}{3} (-\sin \theta) \\ &= \sin^2 \frac{\theta}{3} \left\{ \cos \frac{\theta}{3} \cos \theta - \sin \frac{\theta}{3} \sin \theta \right\} \\ &= \sin^2 \frac{\theta}{3} \cos \left(\frac{\theta}{3} + \theta \right) = \sin^2 \frac{\theta}{3} \cos \frac{4\theta}{3} \end{aligned}$$

となる。 $y(\theta)$ についても同様に計算すると $y'(\theta) = \sin^2 \frac{\theta}{3} \sin \frac{4\theta}{3}$ となる。 $\sin X = 0$ となるのは $X = n\pi$ (n は整数) であり， $\cos X = 0$ となるのは $X = \left(n + \frac{1}{2} \right) \pi$ (n は整数) なので $x'(\theta) = 0$ となるのは $\theta = 0, \frac{3}{8}\pi, \frac{9}{8}\pi, \frac{15}{8}\pi, \frac{21}{8}\pi, 3\pi$ である。 $y'(\theta) = 0$ となるのは $\theta = 0, \frac{3}{4}\pi, \frac{3}{2}\pi, \frac{9}{4}\pi, 3\pi$ である。 よって増減表は次のようになる。

	0		$\frac{3}{8}\pi$		$\frac{3}{4}\pi$		$\frac{9}{8}\pi$		$\frac{3}{2}\pi$		$\frac{15}{8}\pi$		$\frac{9}{4}\pi$		$\frac{21}{8}\pi$		3π
x'	0	+	0	-	-	-	0	+	+	+	0	-	-	-	0	+	0
x		→		←	←	←		→	→	→		←	←	←		→	
y'	0	+	+	+	0	-	-	-	0	+	+	+	0	-	-	-	0
y		↑	↑	↑		↓	↓	↓	0	↑	↑	↑		↓	↓	↓	
曲線		↗	↑	↖	←	↙	↓	↘	→	↗	↑	↖	←	↙	↓	↘	

$\theta = 0$ の点は特異点になるので，演習問題 4.15 と同様に調べる必要がある。 この場合は尖った曲線にはならない事が分かる。 証明は略すが，興味のあるものは証明を試みよ。 増減表より曲線は次図のようになる。



全長を L とすると,

$$x'(\theta)^2 + y'(\theta)^2 = \sin^4 \frac{\theta}{3} \cos^2 \frac{4\theta}{3} + \sin^4 \frac{\theta}{3} \sin^2 \frac{4\theta}{3} = \sin^4 \frac{\theta}{3}$$

なので

$$\begin{aligned} L &= \int_0^{3\pi} \sqrt{\sin^4 \frac{\theta}{3}} d\theta = \int_0^{3\pi} \sin^2 \frac{\theta}{3} d\theta \\ &= \int_0^{3\pi} \frac{1}{2} \left(1 - \cos \frac{2\theta}{3} \right) d\theta \\ &= \frac{1}{2} \left[\theta - \frac{3}{2} \sin \frac{2\theta}{3} \right]_0^{3\pi} = \frac{3\pi}{2} \end{aligned}$$

となる。

演習問題 1.18 曲線 $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$ の長さを求めよ。

\sqrt{x} があるので, $x \geq 0$ が必要である。また, 同様に $y \geq 0$ でもあるので, $\sqrt{x} = 1 - \sqrt{y} \leq 1$ より, $x \leq 1$ となる。

曲線が $y = f(x)$ と表されているときは $t = x$ と考えると長さ L は

$$L = \int_0^1 \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2} dx$$

となる。 $\sqrt{y} = 1 - \sqrt{x}$ より $y = 1 - 2\sqrt{x} + x$ となる。よって $\frac{dy}{dx} = 1 - \frac{1}{\sqrt{x}}$ より $\left(\frac{dy}{dx} \right)^2 =$

$1 - \frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x}$ となる。よって

$$L = \int_0^1 \sqrt{2 - \frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x}} dx$$

となる。 $x = t^2$ と変数変換すると $L = 2 \int_0^1 \sqrt{2t^2 - 2t + 1} dt$ となる。更に $u = t - \frac{1}{2}$ と変数変換すると、 $L = 2\sqrt{2} \int_{-1/2}^{1/2} \sqrt{u^2 + \frac{1}{4}} du$ となる。よって $L = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \log(1 + \sqrt{2})$ となる。