解析学 II 問題解説 #5

河野

演習問題 2.1　次の定積分を定義に基づいて計算せよ。

(1) $\displaystyle\iint_D xydxdy$　(ただし $D = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, 0 \leqq x \leqq 2, 0 \leqq y \leqq 2 \right\}$)

(2) $\displaystyle\iint_D x^2y^2dxdy$　(ただし $D = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, 0 \leqq x \leqq 1, 0 \leqq y \leqq 1 \right\}$)

(1)　D の分割として n 等分割 $\Delta_n = \{ x_0, x_1, \ldots, x_n \,;\, y_0, y_1, \ldots, y_n \}$ を採用する。ここで $x_i = \dfrac{2i}{n}$, $y_j = \dfrac{2j}{n}$ $(i = 0, 1, \ldots, n,\ j = 0, 1, \ldots, n)$ とする。$z = f(x,y) = xy$ は D において x に関しても, y に関しても単調増加なので, 関数 $f(x,y)$ は小領域 $D_{ij} = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x_{i-1} \leqq x \leqq x_i, y_{j-1} \leqq y \leqq y_j \right\}$ において (x_i, y_j) で最大値をとり，(x_{i-1}, y_{j-1}) で最小値をとる。よって

$$\begin{aligned}
M_{ij} &= \sup \{ f(x,y) \mid x_{i-1} \leqq x \leqq x_i, y_{j-1} \leqq y \leqq y_j \} \\
&= \frac{2i}{n}\frac{2j}{n} = \frac{4ij}{n^2} \\
m_{ij} &= \inf \{ f(x,y) \mid x_{i-1} \leqq x \leqq x_i, y_{j-1} \leqq y \leqq y_j \} \\
&= \frac{2(i-1)}{n}\frac{2(j-1)}{n} = \frac{4(i-1)(j-1)}{n^2}
\end{aligned}$$

となる。

$$\begin{aligned}
S(\Delta_n) &= 4\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{ij}{n^2}\frac{1}{n^2} = 4\frac{1}{n^4}\left(\sum_{i=1}^{n} i\right)\left(\sum_{j=1}^{n} j\right) \\
&= 4\frac{1}{n^4}\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 \\
&= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 \\
s(\Delta_n) &= 4\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{(i-1)(j-1)}{n^2}\frac{1}{n^2} = 4\frac{1}{n^4}\left(\sum_{i=1}^{n}(i-1)\right)\left(\sum_{j=1}^{n}(j-1)\right) \\
&= 4\frac{1}{n^4}\left(\frac{(n-1)n}{2}\right)^2 \\
&= \left(1 - \frac{1}{n}\right)^2
\end{aligned}$$

なので

$$\lim_{n\to\infty} S(\Delta_n) = \lim_{n\to\infty} s(\Delta_n) = 1$$

となる。よって

$$\iint_D xydxdy = 1$$

となる。

(1) D の分割として n 等分割 $\Delta_n = \{ x_0, x_1, \ldots, x_n \, ; \, y_0, y_1, \ldots, y_n \}$ を採用する。ここで $x_i = \dfrac{i}{n}$, $y_j = \dfrac{j}{n}$ $(i = 0, 1, \ldots, n,\ j = 0, 1, \ldots, n)$ とする。$z = f(x, y) = x^2 y^2$ は D において x に関しても，y に関しても単調増加なので，

$$\begin{aligned}
M_{ij} &= \sup \{ f(x,y) \mid x_{i-1} \leqq x \leqq x_i, y_{j-1} \leqq y \leqq y_j \} \\
&= \left(\frac{i}{n} \right)^2 \left(\frac{j}{n} \right)^2 = \frac{i^2 j^2}{n^4} \\
m_{ij} &= \inf \{ f(x,y) \mid x_{i-1} \leqq x \leqq x_i, y_{j-1} \leqq y \leqq y_j \} \\
&= \left(\frac{(i-1)}{n} \right)^2 \left(\frac{(j-1)}{n} \right)^2 = \frac{(i-1)^2 (j-1)^2}{n^4}
\end{aligned}$$

となる。よって

$$\begin{aligned}
S(\Delta_n) &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{i^2 j^2}{n^4} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n^6} \left(\sum_{i=1}^{n} i^2 \right) \left(\sum_{j=1}^{n} j^2 \right) \\
&= \frac{1}{n^6} \left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \right)^2 \\
&= \frac{1}{36} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^2 \left(2 + \frac{1}{n} \right)^2 \\
s(\Delta_n) &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{(i-1)^2 (j-1)^2}{n^4} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n^6} \left(\sum_{i=1}^{n} (i-1)^2 \right) \left(\sum_{j=1}^{n} (j-1)^2 \right) \\
&= \frac{1}{n^6} \left(\frac{(n-1)n(2n-1)}{6} \right)^2 \\
&= \frac{1}{36} \left(1 - \frac{1}{n} \right)^2 \left(2 - \frac{1}{n} \right)^2
\end{aligned}$$

なので

$$\lim_{n \to \infty} S(\Delta_n) = \lim_{n \to \infty} s(\Delta_n) = \frac{1}{9}$$

となる。よって

$$\iint_D x^2 y^2 dxdy = \frac{1}{9}$$

となる。

演習問題 2.2　領域 D が $m(D) = 0$ のとき D 上で有界な任意の関数 f に対し

$$\iint_D f(x, y) dxdy = 0$$

が成立することを示せ (定理 2.3 を用いる)。

$M = \sup \{ |f(x, y)| \mid (x, y) \in D \}$ とおくと任意の $(x, y) \in D$ に対し

$$-M \leqq f(x, y) \leqq M$$

が成立している。積分の単調性より

$$-\iint_D M dxdy \leqq \iint_D f(x,y)dxdy \leqq \iint_D M dxdy$$

となるのが,

$$\begin{aligned}\iint_D M dxdy &= M\iint_D dxdy \\ &= Mm(D) = 0\end{aligned}$$

より

$$0 \leqq \iint_D f(x,y)dxdy \leqq 0$$

が成立する。よって

$$\iint_D f(x,y)dxdy = 0$$

を得る。