解析学 II 第 2 回試験準備問題解説

河野

1 領域 $D = \{\, a \leqq x \leqq b, c \leqq y \leqq d \,\}$ を長方形領域とする。関数 $f(x, y)$ の重積分 $\displaystyle\iint_D f(x, y)dxdy$ の定義を述べよ。

Δ を D の分割とする。分割とは $\Delta = \{\, x_0, x_1, x_2 \ldots, x_n; y_0, y_1, y_2, \ldots, y_m \,\}$ とするとき，

$$a = x_1 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b, \quad c = y_0 < y_1 < y_2 < \ldots < y_m = d$$

を満たすことをいう。$1 \leqq i \leqq n, 1 \leqq j \leqq m$ を満たす自然数 i, j に対し小領域 Δ_{ij} を $\Delta_{ij} = \{\, x_{i-1} \leqq x \leqq x_i,\, y_{j-1} \leqq y \leqq y_j \,\}$ とする。

$$\begin{aligned} M_{ij} &= \sup \{\, f(x, y) \mid (x, y) \in \Delta_{ij} \,\} \\ m_{ij} &= \inf \{\, f(x, y) \mid (x, y) \in \Delta_{ij} \,\} \end{aligned}$$

とおく。

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}, \quad \Delta y_j = y_j - y_{j-1}$$

とおき，分割の最大幅 $\|\Delta\|$ を

$$\|\Delta\| = \max \{\, \Delta x_i, \Delta y_j \mid i = 1, \ldots, n, j = 1, \ldots, m \,\}$$

と定義する。

$$S(\Delta) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} M_{ij} \Delta x_i \Delta y_j, \quad s(\Delta) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} m_{ij} \Delta x_i \Delta y_j$$

とおく。

$$\lim_{\|\Delta\| \to 0} S(\Delta) = \lim_{\|\Delta\| \to 0} s(\Delta)$$

が成立するとき $f(x, y)$ は D で積分可能であるといい，

$$\iint_D f(x, y)dxdy = \lim_{\|\Delta\| \to 0} S(\Delta)$$

と定義する。

2 $D = \{\, 1 \leqq x \leqq 2, 0 \leqq y \leqq 3 \,\}$ とする。重積分

$$\iint_D x^2 y dxdy$$

を定義に基づき計算せよ。計算過程で $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$ を使用してよい。

n を自然数とする。n 等分による分割を Δ_n とする。即ち

$$x_i = 1 + \frac{(2-1)i}{n} = 1 + \frac{i}{n}, \quad y_j = 0 + \frac{(3-0)j}{n} = \frac{3j}{n}$$

とおくとき，$\Delta_n = \{\, x_0, x_1, \ldots, x_n; y_0, y_1, \ldots, y_n \,\}$ とする。このとき

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1=} \frac{1}{n}, \quad \Delta y_j = y_j - y_{j-1} = \frac{3}{n}$$

である。$z = x^2 y$ は D において x に関しても y に関しても単調増加なので，

$$M_{ij} = (x_i)^2 y_j = \left(1 + \frac{i}{n}\right)^2 \frac{3j}{n}, \quad m_{ij} = (x_{i-1})^2 y_{j-1} = \left(1 + \frac{i-1}{n}\right)^2 \frac{3(j-1)}{n}$$

となる。

$$\begin{aligned}
S(\Delta_n) &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(1+\frac{i}{n}\right)^2 \frac{3j}{n}\frac{1}{n}\frac{3}{n} = \frac{9}{n^3}\sum_{i=1}^{n}\left(1+\frac{i}{n}\right)^2 \sum_{j=1}^{n} j \\
&= \frac{9}{n^3}\sum_{i=1}^{n}\left(1+2\frac{i}{n}+\frac{i^2}{n^2}\right)\sum_{j=1}^{n} j \\
&= \frac{9}{n^3}\left(\sum_{i=1}^{n}1+\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}i+\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}i^2\right)\sum_{j=1}^{n} j \\
&= \frac{9}{n^3}\left(n+\frac{2}{n}\frac{n(n+1)}{2}+\frac{1}{n^2}\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)\right)\frac{n(n+1)}{2} \\
&= 9\left(1+1+\frac{1}{n}+\frac{1}{6}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
s(\Delta_n) &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(1+\frac{i-1}{n}\right)^2 \frac{3(j-1)}{n}\frac{1}{n}\frac{3}{n} = \frac{9}{n^3}\sum_{i=1}^{n}\left(1+\frac{i-1}{n}\right)^2 \sum_{j=1}^{n} j-1 \\
&= \frac{9}{n^3}\sum_{i=0}^{n-1}\left(1+\frac{i}{n}\right)^2\sum_{j=0}^{n-1} j \\
&= 9\left(1+1+\frac{1}{n-1}+\frac{1}{6}\left(1+\frac{1}{n-1}\right)\left(2+\frac{1}{n-1}\right)\right)\left(1+\frac{1}{n-1}\right)\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

となるので

$$\lim_{n\to\infty} S(\Delta_n) = \frac{21}{2} = \lim_{n\to\infty} s(\Delta_n)$$

となる。よって

$$\iint_D x^2 y dxdy = \frac{21}{2}$$

である。

3 $D = \{\, 0 \leqq x \leqq 2, 0 \leqq y \leqq 1 \,\}$ とする。重積分

$$\iint_D -xydxdy$$

を定義に基づき計算せよ。

n を自然数とする。n 等分による分割を Δ_n とする。即ち

$$x_i = 0 + \frac{(2-0)i}{n} = \frac{2i}{n}, \quad y_j = 0 + \frac{(1-0)i}{n} = \frac{i}{n}$$

とおくとき，$\Delta_n = \{ x_0, x_1, \dots, x_n; y_0, y_1, \dots, y_n \}$ とする。このとき

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1} = \frac{2}{n}, \quad \Delta y_j = y_j - y_{j-1=}\frac{1}{n}$$

である。$z = -xy$ は D において x に関しても y に関しても単調減少なので，

$$M_{ij} = -x_{i-1}y_{j-1} = -\frac{2(i-1)}{n}\frac{(j-1)}{n}, \quad m_{ij} = -x_i y_j = -\frac{2i}{n}\frac{j}{n}$$

となる。

$$\begin{aligned} s(\Delta_n) &= -\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{2i}{n}\frac{j}{n}\frac{2}{n}\frac{1}{n} = -\frac{4}{n^4}\sum_{i=1}^{n} i \sum_{j=1}^{n} j \\ &= -\frac{4}{n^4}\frac{n(n+1)}{2}\cdot\frac{n(n+1)}{2} \\ &= -\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right) \\ S(\Delta_n) &= -\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{2(i-1)}{n}\frac{j-1}{n}\frac{2}{n}\frac{1}{n} = -\frac{4}{n^4}\sum_{i=1}^{n}(i-1)\sum_{j=1}^{n}(j-1) \\ &= -\left(1+\frac{1}{n-1}\right)\left(1+\frac{1}{n-1}\right) \end{aligned}$$

となるので

$$\lim_{n\to\infty} S(\Delta_n) = -1 = \lim_{n\to\infty} s(\Delta_n)$$

となる。よって

$$\iint_D x^2 y dx dy = -1$$

である。

$\boxed{4}$ $D = \{ a \leqq x \leqq b, c \leqq y \leqq d \}$ とする。$z = f(x,y)$ 及び $z = g(x,y)$ は D で積分可能であるとする。このとき

$$\iint_D (f(x,y) + g(x,y))\, dxdy = \iint_D f(x,y)dxdy + \iint_D g(x,y)dxdy$$

が成立することを示せ

分割を

$$\Delta = \{ x_0, x_1, \dots, x_n; y_0, y_1, \dots, y_m \}$$

とする。$1 \leqq i \leqq n, 1 \leqq j \leqq m$ を満たす自然数 i, j に対し小領域 Δ_{ij} を $\Delta_{ij} = \{\, x_{i-1} \leqq x \leqq x_i,\ y_{j-1} \leqq y \leqq y_j \,\}$ とする。

$$
\begin{aligned}
M_{ij} &= \sup \{\, f(x,y) + g(x,y) \mid (x,y) \in \Delta_{ij} \,\} \\
M_{ij}(f) &= \sup \{\, f(x,y) \mid (x,y) \in \Delta_{ij} \,\} \\
M_{ij}(g) &= \sup \{\, g(x,y) \mid (x,y) \in \Delta_{ij} \,\} \\
m_{ij} &= \inf \{\, f(x,y) + g(x,y) \mid (x,y) \in \Delta_{ij} \,\} \\
m_{ij}(f) &= \inf \{\, f(x,y) \mid (x,y) \in \Delta_{ij} \,\} \\
m_{ij}(g) &= \inf \{\, g(x,y) \mid (x,y) \in \Delta_{ij} \,\} \\
\Delta x_i &= x_i - x_{i-1}, \quad \Delta y_j = y_j - y_{j-1}
\end{aligned}
$$

とおき，分割の最大幅 $\|\Delta\|$ を

$$
\|\Delta\| = \max \{\, \Delta x_i, \Delta y_j \mid i = 1, \ldots, n, j = 1, \ldots, m \,\}
$$

と定義する。

$$
\begin{aligned}
S(\Delta) &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} M_{ij} \Delta x_i \Delta y_j, \quad s(\Delta) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} M_{ij} \Delta x_i \Delta y_j \\
S(\Delta)(f) &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} m_{ij}(f) \Delta x_i \Delta y_j, \quad s(\Delta)(f) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} M_{ij}(f) \Delta x_i \Delta y_j \\
S(\Delta)(g) &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} M_{ij}(g) \Delta x_i \Delta y_j, \quad s(\Delta)(g) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} m_{ij}(g) \Delta x_i \Delta y_j
\end{aligned}
$$

とおく。

$$
m_{ij}(f) \leqq f(x,y) \leqq M_{ij}(f), \quad m_{ij}(g) \leqq g(x,y) \leqq M_{ij}(g)
$$

より

$$
m_{ij}(f) + m_{ij}(g) \leqq f(x,y) + g(x,y) \leqq M_{ij}(f) + M_{ij}(g)
$$

が成立するので

$$
m_{ij}(f) + m_{ij}(g) \leqq m_{ij}, \quad M_{ij} \leqq M_{ij}(f) + M_{ij}(g)
$$

が成立する。よって

$$
m_{ij}(f)\Delta x_i \Delta y_j + m_{ij}(g)\Delta x_i \Delta y_j \leqq m_{ij}\Delta x_i \Delta y_j, \quad M_{ij}\Delta x_i \Delta y_j \leqq M_{ij}(f)\Delta x_i \Delta y_j + M_{ij}(g)\Delta x_i \Delta y_j
$$

が成立する。これを $i = 1, \ldots, n$，$j = 1, \ldots, m$ まで加えると

$$
s(\Delta)(f) + s(\Delta)(g) \leqq s(\Delta), \quad S(\Delta) \leqq S(\Delta)(f) + S(\Delta)(g)
$$

が得られる。

$$
\lim_{\|\Delta\| \to 0} \bigl(S(\Delta)(f) + S(\Delta)(g) \bigr) = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \bigl(s(\Delta)(f) + s(\Delta)(g) \bigr)
$$

が成立するのではさみうちの定理より

$$
\iint_D (f(x,y) + g(x,y))\, dxdy = \iint_D f(x,y) dxdy + \iint_D g(x,y) dxdy
$$

が成立する。

$\boxed{\mathbf{5}}$ $D_1 = \{\, a \leqq x \leqq b, c \leqq y \leqq d \,\}$，$D_2 = \{\, b \leqq x \leqq e, c \leqq y \leqq d \,\}$，$D = \{\, a \leqq x \leqq e, c \leqq y \leqq d \,\}$ とする。$z = f(x,y)$ は D 及び D_1，D_2 で積分可能であるとする。このとき

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_{D_1} f(x,y)dxdy + \iint_{D_2} f(x,y)dxdy$$

が成立することを示せ

Δ_1 を D_1 の分割，Δ_2 を D_2 の分割で次の形のものとする。

$$\Delta_1 = \{\, x_0, x_1, \ldots, x_n; y_0, y_1, \ldots, y_m \,\}, \quad \Delta_2 = \{\, x'_0, x'_1, \ldots, x'_l; y_0, y_1, \ldots, y_m \,\}$$

$x_n = b = x'_0$ なので $x_{n+i} = x'_i$ $(i = 1, \ldots, l)$ とおくと

$$\Delta = \{\, x_0, x_1, \ldots, x_{l+n}; y_0, y_1, \ldots, y_m \,\}$$

は D の分割になっている。$1 \leqq i \leqq n, 1 \leqq j \leqq m$ を満たす自然数 i, j に対し小領域 Δ_{ij} を $\Delta_{ij} = \{\, x_{i-1} \leqq x \leqq x_i,\, y_{j-1} \leqq y \leqq y_j \,\}$ とする。

$$\begin{aligned} M_{ij} &= \sup\{\, f(x,y) \mid (x,y) \in \Delta_{ij} \,\} \\ m_{ij} &= \inf\{\, f(x,y) \mid (x,y) \in \Delta_{ij} \,\} \\ \Delta x_i &= x_i - x_{i-1}, \quad \Delta y_j = y_j - y_{j-1} \end{aligned}$$

とおき，分割の最大幅をそれぞれ

$$\begin{aligned} \|\Delta\| &= \max\{\, \Delta x_i, \Delta y_j \mid i = 1, \ldots, l+n, j = 1, \ldots, m \,\} \\ \|\Delta\|_1 &= \max\{\, \Delta x_i, \Delta y_j \mid i = 1, \ldots, n, j = 1, \ldots, m \,\} \\ \|\Delta\|_2 &= \max\{\, \Delta x_i, \Delta y_j \mid i = n, \ldots, l+n, j = 1, \ldots, m \,\} \end{aligned}$$

と定義する。

$$\begin{aligned} S(\Delta) &= \sum_{i=1}^{l+n}\sum_{j=1}^{m} M_{ij}\Delta x_i \Delta y_j, \quad s(\Delta) = \sum_{i=1}^{l+n}\sum_{j=1}^{m} M_{ij}\Delta x_i \Delta y_j \\ S(\Delta_1)_1 &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} m_{ij}\Delta x_i \Delta y_j, \quad s(\Delta_1)_1 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} M_{ij}\Delta x_i \Delta y_j \\ S(\Delta_2)_2 &= \sum_{i=1}^{l+n}\sum_{j=1}^{m} M_{ij}\Delta x_i \Delta y_j, \quad s(\Delta_2)_2 = \sum_{i=n}^{l+n}\sum_{j=1}^{n} m_{ij}\Delta x_i \Delta y_j \end{aligned}$$

とおく。

$$S(\Delta) = S(\Delta_1)_1 + S(\Delta_2)_2, \quad s(\Delta) = s(\Delta_1)_1 + s(\Delta_2)_2$$

が成立しているので極限をとることにより

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_{D_1} f(x,y)dxdy + \iint_{D_2} f(x,y)dxdy$$

の成立が示される。

$\boxed{\mathbf{6}}$ 重積分

$$I = \iint_D \sqrt{x}dxdy \quad (D = \{\, x^2 + y^2 \leqq x \,\})$$

を求める。

(1) D を図示せよ。

(2) D を縦線型 $(D = \{\, a \leqq x \leqq b, g_1(x) \leqq y \leqq g_2(x) \,\}$ の形) に表示せよ。

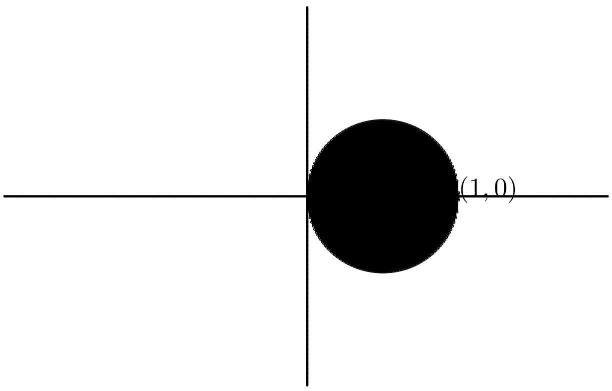
(3) I を累次積分の形に表せ。

(4) I を求めよ。

(1) $x^2 + y^2 \leqq x$ を変形すると

$$\left(x - \left(\frac{1}{2}\right)\right)^2 + y^2 \leqq \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

となるので $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ を中心とする半径 $\frac{1}{2}$ の円である。よって次図のようになる。



(2) $0 \leqq x \leqq 1$ である。また $x^2 + y^2 = x$ を変形して $y^2 = x - x^2$ となるので，$y = \pm\sqrt{x - x^2}$ となる。よって

$$D = \left\{ 0 \leqq x \leqq 1, -\sqrt{x - x^2} \leqq y \leqq \sqrt{x - x^2} \right\}$$

と表示できる。

(3)

$$I = \int_0^1 \left\{ \int_{-\sqrt{x-x^2}}^{\sqrt{x-x^2}} \sqrt{x}dy \right\} dx$$

となる。

(4)

$$
\begin{aligned}
I &= \int_0^1 \left\{ \int_{-\sqrt{x-x^2}}^{\sqrt{x-x^2}} \sqrt{x} dy \right\} dx = \int_0^1 \left\{ \left[\sqrt{x} y \right]_{y=-\sqrt{x-x^2}}^{\sqrt{x-x^2}} \right\} dx \\
&= \int_0^1 2\sqrt{x}\sqrt{x-x^2} dx = \int_0^1 2\sqrt{x}\sqrt{x(1-x)} dx \\
&= \int_0^1 2x\sqrt{1-x} dx
\end{aligned}
$$

となる。$1-x=t$ とおき置換積分を行うと

$$
\begin{aligned}
I &= -2\int_1^0 (1-t)t^{\frac{1}{2}} dt = 2\int_0^1 (1-t)t^{\frac{1}{2}} dt \\
&= \frac{8}{15}
\end{aligned}
$$

を得る。

$\boxed{\mathbf{7}}$ D を $y=x+2$ と $y=x^2$ に囲まれる領域とする。

$$
I = \iint_D \{2x+3y\}\, dxdy
$$

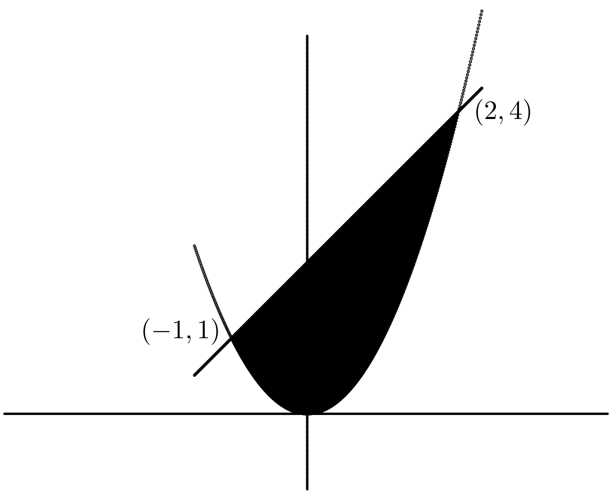
に関し次の問に答えよ。

(1) D を図示せよ。

(2) D を縦線型 ($D=\{\, a \leqq x \leqq b, g_1(x) \leqq y \leqq g_2(x) \,\}$ の形) に表示し，y で先に積分するタイプの累次積分で表せ (計算は実行しなくてもよい)。

(3) D をを適当な領域 D_1 および D_2 に分割し，それぞれを横線型 ($D=\{\, a \leqq y \leqq b, g_1(y) \leqq x \leqq g_2(y) \,\}$ の形) に表示し，x で先に積分するタイプの累次積分で表せ (計算は実行しなくてもよい)。

(4) I を求めよ。



(1) $x^2 = x + 2$ を解くと $x = -1, 2$ を得る。よって交点は $(-1, 1)$，$(2, 4)$ なので，前図のようになっている。

(2)

$$D = \{\, -1 \leqq x \leqq 2, x^2 \leqq y \leqq x + 2 \,\}$$

なので

$$I = \int_{-1}^{2} \left\{ \int_{x^2}^{x+2} \{2x + 3y\}\, dy \right\} dx$$

となる。

(3) $0 \leqq y \leqq 4$ である $g_1(y)$ が 1 の前後で形が変わるので，そこで分割する。$x = g_2(y)$ が表す曲線は $y = x^2$ $(x \geqq 0)$ の曲線なので，$x = \sqrt{y}$ となる。y が 1 以下のとき $x = g_1(y)$ が表す曲線は $y = x^2$ $(x \leqq 0)$ の曲線なので $x = -\sqrt{y}$ となる。y が 1 以上のとき $x = g_1(y)$ が表す曲線 (今の場合直線であるが) は $y = x + 2$ の曲線なので $x = y - 2$ となる。よって

$$D_1 = \{\, 0 \leqq y \leqq 1, -\sqrt{y} \leqq x\sqrt{y} \,\}, \quad D_2 = \{\, 1 \leqq y \leqq 4, y - 2 \leqq x \leqq \sqrt{y} \,\}$$

となるので

$$\begin{aligned} I &= \iint_{D_1} \{2x + 3y\}\, dxdy + \iint_{D_2} \{2x + 3y\}\, dxdy \\ &= \int_0^1 \left\{ \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} \{2x + 3y\}\, dx \right\} dy + \int_1^4 \left\{ \int_{y-2}^{\sqrt{y}} \{2x + 3y\}\, dx \right\} dy \end{aligned}$$

となる。

(4) この問題の場合 (2) の方が計算が簡単そうなのでそちらで計算を実行する。

$$\begin{aligned} I &= \int_{-1}^{2} \left\{ \int_{x^2}^{x+2} \{2x + 3y\}\, dy \right\} dx \\ &= \int_{-1}^{2} \left\{ \left[2xy + \frac{3}{2} y^2 \right]_{y=x^2}^{x+2} \right\} dx \\ &= \int_{-1}^{2} \left\{ -\frac{3}{2} x^4 - 2x^3 + \frac{7}{2} x^2 + 10x + 6 \right\} dx \\ &= \frac{261}{10} \end{aligned}$$

$\boxed{8}$ 次の重積分について考える。ただし $D = \{0 \leqq y \leqq x \leqq 1\}$ とする。

$$I = \iint_D e^{-x^2}\, dxdy$$

(1) 領域 D を図示せよ。

(2) D を横線形 ($\{\, (x, y) \mid a \leqq y \leqq b, g_1(y) \leqq x \leqq g_2(y) \,\}$ の形のもの) の形で表せ。

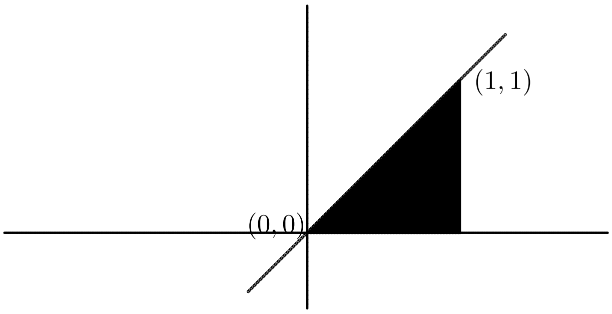
(3) 重積分 I を x を先に計算する形の累次積分で表せ (計算を実行しなくてもよい)。

(4) D を縦線形 ($\{\, (x, y) \mid a \leqq x \leqq b, g_1(x) \leqq y \leqq g_2(x) \,\}$ の形のもの) の形で表せ。

(5) 重積分 I を y を先に積分する形の累次積分で表せ。

(6) I を求めよ。

(1) $\{\,0 \leqq y\,\}$, $\{\,y \leqq x\,\}$, $\{\,x \leqq 1\,\}$ の共通部分なので次図のようになる。



(2)

$$D = \{\,0 \leqq y \leqq 1, y \leqq x \leqq 1\,\}$$

(3)

$$I = \iint_D e^{-x^2} dxdy = \int_0^1 \left\{ \int_y^1 e^{-x^2} dx \right\} dy$$

(4)

$$D = \{\,0 \leqq x \leqq 1, 0 \leqq y \leqq x\,\}$$

(5)

$$\iint_D e^{-x^2} dxdy = \int_0^1 \left\{ \int_0^x e^{-x^2} dy \right\} dx$$

(6) 前問は計算の複雑さの違いであったが，今回は一方は不定積分を実行して原始関数を得ることができない。$\displaystyle\int e^{-x^2} dx$ は知られた関数で表示することができない。(5) の方で計算する。

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \left\{ \int_0^x e^{-x^2} dy \right\} dx = \int_0^1 \left\{ \left[e^{-x^2} y \right]_{y=0}^x \right\} dx \\ &= \int_0^1 x e^{-x^2} dx \end{aligned}$$

となるので $t = -x^2$ とおくと $\dfrac{dt}{dx} = -2x$ なので

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{-1} x e^t \frac{1}{-2x} dt = -\frac{1}{2} \int_0^{-1} e^t dt \\ &= -\frac{1}{2} \left[e^t \right]_{t=0}^{-1} = \frac{1}{2} \left(1 - e^{-1}\right) \end{aligned}$$

$\boxed{9}$ 重積分

$$I = \iint_D \sqrt{1 - x^2 - y^2} dxdy \qquad (D = \{\,x^2 + y^2 \leqq x\,\})$$

を次に従って計算せよ。

(1) $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ とおいて変数変換を行う。D に対応する r–θ 平面の領域 E を求めよ。

(2) この対応で一対一でない部分を求めよ。

(3) ヤコビアン $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}$ を計算せよ (計算過程も書くこと)。

(4) I を求めよ。計算途中で

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3\theta d\theta = \frac{2}{3}$$

を使用してもよい。

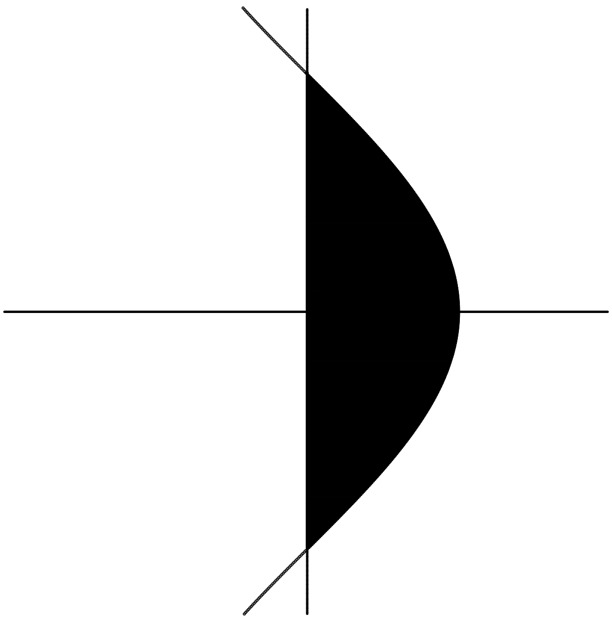
(1) 図は問題 $\boxed{6}$ と同じである。$x = r\cos\theta \geqq 0$ なので θ の範囲は $-\dfrac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ としてよい。θ を $0 \leqq \theta \leqq 2\pi$ の範囲で考えると，$0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$, $\dfrac{3\pi}{2} \leqq \theta \leqq 2\pi$ となるが，ここでは 1 つながりにするため，後者の部分を -2π 移動して考えた。$x^2 + y^2 \leqq x$ に代入すると $r^2 \leqq r\cos\theta$ となる。$r > 0$ の場合は r で割ると

$$r \leqq \cos\theta$$

を得る。この式は $r = 0$ の場合も成立しているので，求める領域は

$$E = \left\{ (r,\theta) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; -\frac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}, 0 \leqq r \leqq \cos\theta \right\}$$

である。領域 E は r–θ 平面では次図のようになっている。この問題では図を描くことは要求されていないが，図を描いて考えることを強く推奨します。



(2) 対応が一対一でない点とは，異なる点 (r,θ), (r',θ') に対し

$$r\cos\theta = x = r'\cos\theta', \quad r\sin\theta = y = r'\sin\theta'$$

が成立することである。$r^2=x^2+y^2=r'^2$ より $r=r'$ は成立している。$r=0$ のときは θ および θ' がどのような値でも等号が成立する。このときは一対一でない。よって $r\neq 0$ とする。r で割ることにより

$$\cos\theta=\cos\theta',\quad \sin\theta=\sin\theta'$$

が成立する。このとき θ と θ' の差は 2π の整数倍であるが，ともに $-\frac{\pi}{2}$ と $\frac{\pi}{2}$ の間にあるので，$\theta=\theta'$ となる。よって一対一でないのは

$$\{\,(r,\theta)\in E\mid r=0\,\}$$

である。

(3)

$$\begin{aligned}\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} &= \det\begin{pmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial\theta}\\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial\theta}\end{pmatrix}=\begin{vmatrix}\cos\theta & -r\sin\theta\\ \sin\theta & r\cos\theta\end{vmatrix}\\ &= \cos\theta r\cos\theta-\sin\theta(-r\sin\theta)\\ &= r\left(\cos^2\theta+\sin^2\theta\right)=r\end{aligned}$$

(4)　変数変換の条件は (1) 一対一でない部分の面積が 0，(2) ヤコビアンが 0 になる部分が面積確定，なので今の場合この条件を満たしている。

$$\begin{aligned}I &= \iint_D\sqrt{1-x^2-y^2}dxdy\\ &= \iint_E\sqrt{1-r^2}rdrd\theta\\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left\{\int_0^{\cos\theta}r\sqrt{1-r^2}dr\right\}d\theta\\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left\{\left[-\frac{1}{3}\left(1-r^2\right)^{\frac{3}{2}}\right]_{r=0}^{\cos\theta}\right\}d\theta\\ &= -\frac{1}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left\{\left(1-\cos^2\theta\right)^{\frac{3}{2}}-1\right\}d\theta\\ &= -\frac{2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left\{\left(1-\cos^2\theta\right)^{\frac{3}{2}}-1\right\}d\theta\\ &= -\frac{2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left\{\sin^3\theta-1\right\}d\theta\\ &= \frac{2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta-\frac{2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3\theta d\theta\\ &= \frac{2}{3}\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3}\frac{2}{3}=\frac{3\pi-4}{9}\end{aligned}$$

計算途中で対称性を利用して積分区間を $-\frac{\pi}{2}$ から $\frac{\pi}{2}$ を 0 から $\frac{\pi}{2}$ に変更した。これを行わない場合，θ が負のときに $\sqrt{1-\cos^2\theta}=|\sin\theta|=-\sin\theta$ とする必要がある。

$\boxed{\mathbf{10}}$ k を自然数とする。広義積分

$$I = \iint_D \frac{1}{(x^2+y^2)^k}dxdy \qquad (D = \left\{ x^2+y^2 \geqq 1, x \geqq 0, y \geqq 0 \right\})$$

を次に従って計算せよ。

(1) $\{A_n\}$ が D の近似増加列であることの定義を述べよ。

(2) $A_n = \left\{ 1 \leqq x^2+y^2 \leqq n^2, x \geqq 0, y \geqq 0 \right\}$ とし，$J_n = \displaystyle\iint_{A_n} \frac{1}{(x^2+y^2)^k}dxdy$ とするとき，I を J_n を用いて表せ。このとき極限記号 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}$ を用いてよい。

(3) J_n を計算するため $x = r\cos\theta$，$y = r\sin\theta$ とおいて変数変換を行う。A_n に対応する r–θ 平面の領域 E_n を求めよ。

(4) この対応で一対一でない部分を求めよ。

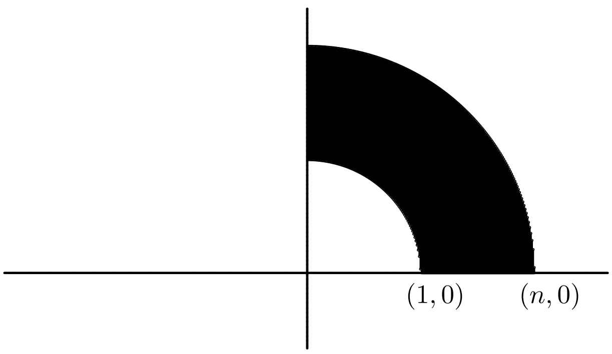
(5) ヤコビアン $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}$ を計算せよ (計算過程も書くこと)。

(6) J_n を求めよ。

(7) 広義積分が存在する場合はそれを求め，収束しないときはそのことを示せ。

(1) $\mathbb{R}^2$ の部分集合の列 $\{A_n\}$ が次の 3 つを満たすとき D の近似増加列であるという。
(1) 各自然数 n に対し A_n は有界閉集合である。
(2) 各自然数 n に対し $A_n \subseteq A_{n+1} \subseteq D$ が成立する。
(3) D に含まれる任意の有界閉集合 K に対し $K \subseteq A_n$ となる A_n が存在する。
(2)

$$I = \lim_{n\to\infty} J_n$$



(3) A_n は x–y 平面で上図のようになっているので $0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ である。よって

$$E_n = \left\{ (r,\theta) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 1 \leqq r \leqq n, 0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2} \right\}$$

(4) 対応が一対一でない点とは，異なる点 (r, θ)，(r', θ') に対し

$$r\cos\theta = x = r'\cos\theta', \quad r\sin\theta = y = r'\sin\theta'$$

が成立することである。$r^2 = x^2 + y^2 = r'^2$ より $r = r'$ は成立している。$r \geqq 1$ なので r で割ることにより

$$\cos\theta = \cos\theta', \quad \sin\theta = \sin\theta'$$

が成立する。このとき θ と θ' の差は 2π の整数倍であるが，ともに 0 と $\dfrac{\pi}{2}$ の間にあるので，$\theta = \theta'$ となる。よって一対一でない点はないので求める集合は空集合である。

(5)

$$\begin{aligned}
\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} &= \det\begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} \\
&= \cos\theta r\cos\theta - \sin\theta(-r\sin\theta) \\
&= r\big(\cos^2\theta + \sin^2\theta\big) = r
\end{aligned}$$

(6) 変数変換の条件はは (1) 一対一でない部分の面積が 0 (空集合の面積は 0 である)，(2) ヤコビアンが 0 になる部分が面積確定 (空集合の面積は 0 であり，面積確定) であり，この変数変換はこの条件を満たしている。

$$\begin{aligned}
J_n &= \iint_{A_n} \frac{1}{(x^2+y^2)^k} dxdy \\
&= \iint_{E_n} \frac{r}{r^{2k}} drd\theta = \int_1^n \left\{ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{r^{2k-1}} d\theta \right\} dr \\
&= \frac{\pi}{2} \int_1^n \frac{1}{r^{2k-1}} dr
\end{aligned}$$

$k = 1$ のときは

$$\begin{aligned}
J_n &= \frac{\pi}{2} \int_1^n \frac{1}{r^{2k-1}} dr = \frac{\pi}{2} \int_1^n \frac{1}{r} dr \\
&= \frac{\pi}{2} \Big[\log r \Big]_{r=1}^n = \frac{\pi}{2} \log n
\end{aligned}$$

となる。$k > 1$ のときは

$$\begin{aligned}
J_n &= \frac{\pi}{2} \int_1^n \frac{1}{r^{2k-1}} dr = \frac{\pi}{2} \int_1^n \frac{1}{2-2k} r^{2-2k} dr \\
&= \frac{\pi}{2(2-2k)} \left(\frac{1}{n^{2k-2}} - 1 \right) \\
&= \frac{\pi}{2(2k-2)} \left(1 - \frac{1}{n^{2k-2}} \right)
\end{aligned}$$

となる。

(7)　$k=1$ のときは

$$\lim_{n\to\infty} J_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\pi}{2}\log n = \infty$$

なので広義積分は収束しない。$k>1$ のとき

$$\begin{aligned} I &= \lim_{n\to\infty} J_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\pi}{2(2k-2)}\left(1-\frac{1}{n^{2k-2}}\right) \\ &= \frac{\pi}{2(2k-2)} \end{aligned}$$

なので，広義積分は収束し

$$I = \frac{\pi}{2(2k-2)}$$

である。

$\boxed{\mathbf{11}}$ k を自然数とする。広義積分

$$I = \iint_D \frac{1}{(x^2+y^2)^k}dxdy \qquad (D = \left\{\, 0 < x^2+y^2 \leqq 1 \,\right\})$$

を次に従って計算せよ。

(1) $\{A_n\}$ が D の近似増加列であることの定義を述べよ。

(2) $A_n = \left\{ \left(\dfrac{1}{n}\right)^2 \leqq x^2+y^2 \leqq 1 \right\}$ とし，$J_n = \displaystyle\iint_{A_n} \frac{1}{(x^2+y^2)^k}dxdy$ とするとき，I を J_n を用いて表せ。このとき極限記号 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}$ を用いてよい。

(3) J_n を計算するため $x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$ とおいて変数変換を行う。A_n に対応する r–θ 平面の領域 E_n を求めよ。

(4) この対応で一対一でない部分を求めよ。

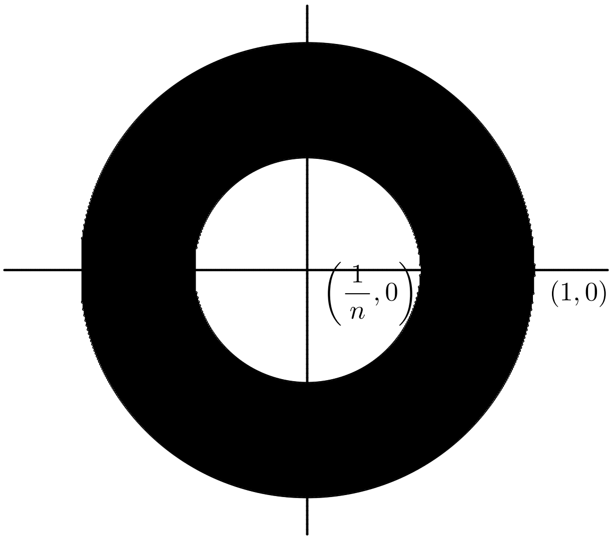
(5) ヤコビアン $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}$ を計算せよ (計算過程も書くこと)。

(6) J_n を求めよ。

(7) 広義積分が存在する場合はそれを求め，収束しないときはそのことを示せ。

(1)　$\mathbb{R}^2$ の部分集合の列 $\{A_n\}$ が次の 3 つを満たすとき D の近似増加列であるという。
(1) 各自然数 n に対し A_n は有界閉集合である。
(2) 各自然数 n に対し $A_n \subseteq A_{n+1} \subseteq D$ が成立する。
(3) D に含まれる任意の有界閉集合 K に対し $K \subseteq A_n$ となる A_n が存在する。
(2)

$$I = \lim_{n\to\infty} J_n$$



(3) A_n は x–y 平面で上図のようになっているので

$$E_n = \left\{ (r, \theta) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, \frac{1}{n} \leqq r \leqq 1, 0 \leqq \theta \leqq 2\pi \right\}$$

(4) 対応が一対一でない点とは，異なる点 (r, θ)，(r', θ') に対し

$$r \cos\theta = x = r' \cos\theta', \quad r \sin\theta = y = r' \sin\theta'$$

が成立することである。$r^2 = x^2 + y^2 = r'^2$ より $r = r'$ は成立している。$r \geqq \dfrac{1}{n}$ なので r で割ることにより

$$\cos\theta = \cos\theta', \quad \sin\theta = \sin\theta'$$

が成立する。このとき θ と θ' の差は 2π の整数倍であるが，ともに 0 と 2π の間にあるので，$\theta = 0$ かつ $\theta' = 2\pi$ またはその逆の場合のみ一対一でない。よって求める集合は

$$\{\,\theta = 0\,\} \cup \{\,\theta = 2\pi\,\}$$

である。(この集合の面積は 0 である。)

(5)

$$\begin{aligned}
\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} &= \det \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} \\
&= \cos\theta r \cos\theta - \sin\theta(-r\sin\theta) \\
&= r\big(\cos^2\theta + \sin^2\theta\big) = r
\end{aligned}$$

(6) 変数変換の条件はは (1) 一対一でない部分の面積が 0 ，(2) ヤコビアンが 0 になる部分が面

積確定 (空集合の面積は 0 であり，面積確定) であり，この変数変換はこの条件を満たしている。

$$
\begin{aligned}
J_n &= \iint_{A_n} \frac{1}{(x^2+y^2)^k} dxdy \\
&= \iint_{E_n} \frac{r}{r^{2k}} drd\theta = \int_{\frac{1}{n}}^{1} \left\{ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{r^{2k-1}} d\theta \right\} dr \\
&= \frac{\pi}{2} \int_{\frac{1}{n}}^{1} \frac{1}{r^{2k-1}} dr
\end{aligned}
$$

$k=1$ のときは

$$
\begin{aligned}
J_n &= \frac{\pi}{2} \int_{\frac{1}{n}}^{1} \frac{1}{r^{2k-1}} dr = \frac{\pi}{2} \int_{\frac{1}{n}}^{1} \frac{1}{r} dr \\
&= \frac{\pi}{2} \Big[\log r \Big]_{r=\frac{1}{n}}^{1} = -\frac{\pi}{2} \log \frac{1}{n} \\
&= \frac{\pi}{2} \log n
\end{aligned}
$$

となる。$k>1$ のときは

$$
\begin{aligned}
J_n &= \frac{\pi}{2} \int_{\frac{1}{n}}^{1} \frac{1}{r^{2k-1}} dr = \frac{\pi}{2} \int_{\frac{1}{n}}^{1} \frac{1}{2-2k} r^{2-2k} dr \\
&= \frac{\pi}{2(2-2k)} \left(1 - \frac{1}{n^{2-2k}} \right) \\
&= \frac{\pi}{2(2k-2)} \left(n^{2k-2} - 1 \right)
\end{aligned}
$$

となる。

(7) $k=1$ のときは

$$
\lim_{n\to\infty} J_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\pi}{2} \log n = \infty
$$

なので広義積分は収束しない。$k>1$ のとき

$$
\begin{aligned}
I &= \lim_{n\to\infty} J_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\pi}{2(2k-2)} \left(n^{2k-2} - 1 \right) \\
&= \infty
\end{aligned}
$$

なので，いずれの場合も広義積分は収束しない。

12 3 重積分

$$
I = \iiint_D xyzdxdydz \quad (D = \left\{ \sqrt{x^2+z^2} \leqq y \leqq 1, x \geqq 0, z \geqq 0 \right\})
$$

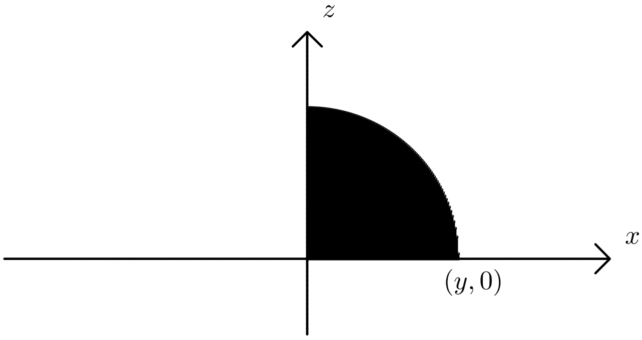
を次に従って求めよ。

(1) D_y を y 座標が y である平面と D との共通部分とする。D_y を x–z 平面内に図示せよ。また x–z 平面内の領域として縦線型に表示せよ。縦線型とは $D_y = \{ a \leqq x \leqq b, g_1(x) \leqq z \leqq g_2(x) \}$ のことである。

(2) 3 重積分 I を累次積分の形に表示せよ。

(3) I を求めよ。

(1)



$$D_y = \left\{ 0 \leqq x \leqq y, 0 \leqq z \leqq \sqrt{y^2 - x^2} \right\}$$

となる。

(2) y は $0 \leqq y \leqq 1$ なので

$$D = \left\{ 0 \leqq y \leqq 1, 0 \leqq x \leqq y, 0 \leqq z \leqq \sqrt{y^2 - x^2} \right\}$$

と表示できるので

$$\begin{aligned} I &= \iiint_D xyzdxdydz \\ &= \int_0^1 \left\{ \int_0^y \left\{ \int_0^{\sqrt{y^2-x^2}} xyzdz \right\} dx \right\} dy \end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \left\{ \int_0^y \left\{ \int_0^{\sqrt{y^2-x^2}} xyzdz \right\} dx \right\} dy \\ &= \int_0^1 \left\{ \int_0^y \left\{ \left[\frac{1}{2} xyz^2 \right]_{z=0}^{\sqrt{y^2-x^2}} \right\} dx \right\} dy \\ &= \int_0^1 \left\{ \int_0^y \left\{ \frac{xy(y^2 - x^2)}{2} \right\} dx \right\} dy \\ &= \int_0^1 \left\{ \left[\frac{1}{4} x^2 y^3 - \frac{1}{8} x^4 y \right]_{x=0}^{y} \right\} dy \\ &= \int_0^1 \frac{1}{8} y^5 dy = \frac{1}{48} \end{aligned}$$

$\boxed{\mathbf{13}}$ $D = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x^2 + y^2 + z^2 \leqq 1, x \geqq 0, y \geqq 0, z \geqq 0 \right\}$ の体積を次に従って求めよう。

(1) $x = r\sin\theta\cos\varphi$, $y = r\sin\theta\sin\varphi$, $z = r\cos\theta$ とおく。D に対応する (r, θ, φ) 空間の領域 E を求めよ。

(2) この対応で一対一でない E の部分を求めよ。

(3) この対応のヤコビアンを計算せよ。計算過程も記述すること。

(4) 変数変換が可能なための条件を述べよ。今の場合その条件が満たされていることを示せ。

(5) 3 重積分 $V = \iiint_D dxdydz$ を r, θ, φ に関するの積分に変数変換せよ。

(6) V を求めよ。

(1)

$$x = r\sin\theta\cos\varphi \geqq 0, \quad y = r\sin\theta\sin\varphi \geqq 0, \quad z = r\cos\theta \geqq 0$$

が成立している。極座標なので $r \geqq 0$ である。$r = 0$ のときは θ, φ がどの値であっての原点に対応するので，$r > 0$ の場合を考えることにより

$$\sin\theta\cos\varphi \geqq 0, \quad \sin\theta\sin\varphi \geqq 0, \quad \cos\theta \geqq 0$$

が成立しているとしてよい。$0 \leqq \theta \leqq \pi$ なので $\cos\theta \geqq 0$ より $0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ が分かる。$\sin\theta \geqq 0$ より

$$\cos\varphi \geqq 0, \quad \sin\varphi \geqq 0$$

が成立する。よって $0 \leqq \varphi \leqq \dfrac{\pi}{2}$ が分かる。$r^2 = x^2 + y^2 + z^2 \leqq 1$ なので $r \leqq 1$ が分かる。以上により

$$E = \left\{ 0 \leqq r \leqq 1, 0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}, 0 \leqq \varphi \leqq \frac{\pi}{2} \right\}$$

となる。

(2) 対応が一対一でない点とは，異なる点 (r, θ, φ)，(r', θ', φ') に対し

$$r\sin\theta\cos\varphi = x = r'\sin\theta'\sin\varphi', \quad r\sin\theta\sin\varphi = y = r'\sin\theta'\sin\varphi', \quad r\cos\theta = r'\cos\theta'$$

が成立することである。$r^2 = x^2 + y^2 + z^2 = r'^2$ より $r = r'$ は成立している。$r = 0$ の場合 θ, φ の値によらず原点に対応する。即ち $r = 0$ のときは一対一ではない。よって $r \neq 0$ とする。r で割ることにより

$$\sin\theta\cos\varphi = \sin\theta'\cos\varphi', \quad \sin\theta\sin\varphi = \sin\theta'\sin\varphi', \quad \cos\theta = \cos\theta'$$

が成立する。$0 \leqq \theta, \theta' \leqq \dfrac{\pi}{2}$ なので $\theta = \theta'$ が成立する。$\theta = 0$ のとき $\sin\theta = 0$ なので φ, φ' の値によらず等号が成立するので一対一ではない。$\theta \neq 0$ のとき $\sin\theta \neq 0$ なので $\sin\theta$ で割ることにより

$$\cos\varphi = \cos\varphi', \quad \sin\varphi = \sin\varphi'$$

が得られる。このとき φ と φ' の差は 2π の整数倍であるが，ともに 0 と $\dfrac{\pi}{2}$ の間にあるので，$\varphi = \varphi'$ が成立する。よって求める集合は

$$\{ r = 0 \} \cup \{ \theta = 0 \}$$

である。(この集合の体積は 0 である。)

(3)

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\varphi)} = \det\begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} & \dfrac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} & \dfrac{\partial y}{\partial \varphi} \\ \dfrac{\partial z}{\partial r} & \dfrac{\partial z}{\partial \theta} & \dfrac{\partial z}{\partial \varphi} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{vmatrix}$$

$$= r^2\begin{vmatrix} \sin\theta\cos\varphi & \cos\theta\cos\varphi & -\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta\sin\varphi & \sin\theta\cos\varphi \\ \cos\theta & -\sin\theta & 0 \end{vmatrix}$$

$$= r^2\big(\sin^3\theta\sin^2\varphi+\cos^2\theta\sin\theta\cos^2\varphi+\cos^2\theta\sin\theta\sin^2\varphi+\sin^3\theta\cos^2\varphi\big)$$

$$= r^2\Big(\sin^3\theta\big(\sin^2\varphi+\cos^2\varphi\big)+\cos^2\theta\sin\theta\big(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi\big)\Big)$$

$$= r^2\big(\sin^3\theta+\cos^2\theta\sin\theta\big) = r^2\sin\theta$$

(4) 変数変換が可能なためには (1) 一対一でない部分の体積が 0 であり，(2) ヤコビアンが 0 である部分が体積確定，が必要である。一対一でない領域は

$$\{\, r=0 \,\}\cup\{\, \theta=0 \,\}$$

なので体積 0 である。またヤコビアンが 0 なのは $\{\, r=0 \,\}\cup\{\, \theta=0 \,\}$ なので体積は 0，よって体積確定である。

(5)

$$V=\iiint_E r^2\sin\theta drd\theta d\varphi$$

(6)

$$\begin{aligned} V &= \iiint_E r^2\sin\theta drd\theta d\varphi \\ &= \int_0^1\left\{\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left\{\int_0^{\frac{\pi}{2}} r^2\sin\theta d\varphi\right\}d\theta\right\}dr \\ &= \int_0^1\left\{\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\pi}{2}r^2\sin\theta d\theta\right\}dr \\ &= -\int_0^1\left\{\left[\frac{\pi}{2}r^2\cos\theta\right]_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}}\right\}dr \\ &= \frac{\pi}{2}\int_0^1 r^2dr=\frac{\pi}{6} \end{aligned}$$

$\boxed{\textbf{14}}$ $D=\left\{\,(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,\middle|\, x^2+y^2+z^2\leqq 1\,\right\}$ の体積を次に従って求めよう。

(1) $x=r\sin\theta\cos\varphi$，$y=r\sin\theta\sin\varphi$，$z=r\cos\theta$ とおく。D に対応する (r,θ,φ) 空間の領域 E を求めよ。

(2) この対応で一対一でない E の部分を求めよ。

(3) この対応のヤコビアンを計算せよ。計算過程も記述すること。

(4) 変数変換が可能なための条件を述べよ。今の場合その条件が満たされていることを示せ。

(5) 3 重積分 $V = \iiint_D dxdydz$ を r, θ, φ に関するの積分に変数変換せよ。

(6) V を求めよ。

(1) 極座標なので $r \geqq 0$, $0 \leqq \theta \leqq \pi$, $0 \leqq \varphi \leqq 2\pi$ が成立している。$r^2 = x^2 + y^2 + z^2 \leqq 1$ なので $r \leqq 1$ が分かる。以上により

$$E = \{\, 0 \leqq r \leqq 1, 0 \leqq \theta \leqq \pi, 0 \leqq \varphi \leqq 2\pi \,\}$$

となる。

(2) 対応が一対一でない点とは，異なる点 (r, θ, φ), (r', θ', φ') に対し

$$r \sin\theta \cos\varphi = x = r' \sin\theta' \sin\varphi, \quad r \sin\theta \sin\varphi = y = r' \sin\theta' \sin\varphi', \quad r \cos\theta = r' \cos\theta'$$

が成立することである。$r^2 = x^2 + y^2 + z^2 = r'^2$ より $r = r'$ は成立している。$r = 0$ の場合 θ, φ の値によらず原点に対応する。即ち $r = 0$ のときは一対一ではない。よって $r \neq 0$ とする。r で割ることにより

$$\sin\theta \cos\varphi = \sin\theta' \cos\varphi', \quad \sin\theta \sin\varphi = \sin\theta' \sin\varphi', \quad \cos\theta = \cos\theta'$$

が成立する。$0 \leqq \theta, \theta' \leqq \pi$ なので $\theta = \theta'$ が成立する。$\theta = 0$ または $\theta = \pi$ のとき $\sin\theta = 0$ なので φ, φ' の値によらず等号が成立するので一対一ではない。$\theta \neq 0$ のとき $\sin\theta \neq 0$ なので $\sin\theta$ で割ることにより

$$\cos\varphi = \cos\varphi', \quad \sin\varphi = \sin\varphi'$$

が得られる。このとき φ と φ' の差は 2π の整数倍であるが，ともに 0 と 2π の間にあるので，$\varphi = 0$ かつ $\varphi' = 2\pi$ またはその逆の場合のみ一対一でない。よって求める集合は

$$\{\, r = 0 \,\} \cup \{\, \theta = 0 \,\} \cup \{\, \varphi = 0 \,\} \cup \{\, \varphi = 2\pi \,\}$$

である。(この集合の体積は 0 である。)

(3)

$$\begin{aligned}\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\varphi)} &= \det\begin{pmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} & \dfrac{\partial x}{\partial \varphi}\\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} & \dfrac{\partial y}{\partial \varphi}\\ \dfrac{\partial z}{\partial r} & \dfrac{\partial z}{\partial \theta} & \dfrac{\partial z}{\partial \varphi}\end{pmatrix} = \begin{vmatrix}\sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi\\ \sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi\\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0\end{vmatrix}\\ &= r^2\begin{vmatrix}\sin\theta\cos\varphi & \cos\theta\cos\varphi & -\sin\theta\sin\varphi\\ \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta\sin\varphi & \sin\theta\cos\varphi\\ \cos\theta & -\sin\theta & 0\end{vmatrix}\\ &= r^2\big(\sin^3\theta\sin^2\varphi+\cos^2\theta\sin\theta\cos^2\varphi+\cos^2\theta\sin\theta\sin^2\varphi+\sin^3\theta\cos^2\varphi\big)\\ &= r^2\Big(\sin^3\theta\big(\sin^2\varphi+\cos^2\varphi\big)+\cos^2\theta\sin\theta\big(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi\big)\Big)\\ &= r^2\big(\sin^3\theta+\cos^2\theta\sin\theta\big) = r^2\sin\theta\end{aligned}$$

(4) 変数変換が可能なためには (1) 一対一でない部分の体積が 0 であり，(2) ヤコビアンが 0 である部分が体積確定，が必要である。一対一でない領域は

$$\{\, r=0 \,\}\cup\{\, \theta=0 \,\}\cup\{\, \varphi=0 \,\}\cup\{\, \varphi=2\pi \,\}$$

なので体積 0 である。またヤコビアンが 0 なのは $\{\, r=0 \,\}\cup\{\, \theta=0 \,\}$ なので体積は 0，よって体積確定である。

(5)

$$V=\iiint_E r^2\sin\theta drd\theta d\varphi$$

(6)

$$\begin{aligned}V &= \iiint_E r^2\sin\theta drd\theta d\varphi\\ &= \int_0^1\left\{\int_0^\pi\left\{\int_0^{2\pi} r^2\sin\theta d\varphi\right\}d\theta\right\}dr\\ &= \int_0^1\left\{\int_0^\pi 2\pi r^2\sin\theta d\theta\right\}dr\\ &= -2\pi\int_0^1\left\{\Big[r^2\cos\theta\Big]_{\theta=0}^{\pi}\right\}dr\\ &= 4\pi\int_0^1 r^2dr=\frac{4\pi}{3}\end{aligned}$$