解析学 II 第 2 回試験準備問題

河野

1 領域 $D = \{\, a \leqq x \leqq b, c \leqq y \leqq d \,\}$ を長方形領域とする。関数 $f(x,y)$ の重積分 $\displaystyle\iint_D f(x,y)dxdy$ の定義を述べよ。

2 $D = \{\, 1 \leqq x \leqq 2, 0 \leqq y \leqq 3 \,\}$ とする。重積分

$$\iint_D x^2 y dxdy$$

を定義に基づき計算せよ。計算過程で $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2N+1)$ を使用してよい。

3 $D = \{\, 0 \leqq x \leqq 2, 0 \leqq y \leqq 1 \,\}$ とする。重積分

$$\iint_D -xy dxdy$$

を定義に基づき計算せよ。

4 $D = \{\, a \leqq x \leqq e, c \leqq y \leqq d \,\}$ とする。$z = f(x,y)$ 及び $z = g(x,y)$ は D で積分可能であるとする。このとき

$$\iint_D (f(x,y) + g(x,y))\, dxdy = \iint_D f(x,y)dxdy + \iint_D g(x,y)dxdy$$

が成立することを示せ

5 $D_1 = \{\, a \leqq x \leqq b, c \leqq y \leqq d \,\}$，$D_2 = \{\, b \leqq x \leqq e, c \leqq y \leqq d \,\}$，$D = \{\, a \leqq x \leqq e, c \leqq y \leqq d \,\}$ とする。$z = f(x,y)$ は D 及び D_1，D_2 で積分可能であるとする。このとき

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_{D_1} f(x,y)dxdy + \iint_{D_2} f(x,y)dxdy$$

が成立することを示せ

6 重積分

$$I = \iint_D \sqrt{x} dxdy \quad (D = \{\, x^2 + y^2 \leqq x \,\})$$

を求める。

(1) D を図示せよ。

(2) D を縦線型 ($D = \{\, a \leqq x \leqq b, g_1(x) \leqq y \leqq g_2(x) \,\}$ の形) に表示せよ。

(3) I を累次積分の形に表せ。

(4) I を求めよ。

$\boxed{\mathbf{7}}$ D を $y=x+2$ と $y=x^2$ に囲まれる領域とする。

$$I=\iint_D (2x+3y)\,dxdy$$

に関し次の問に答えよ。

(1) D を図示せよ。

(2) D を縦線型 ($D=\{\,a \leqq x \leqq b, g_1(x) \leqq y \leqq g_2(x)\,\}$ の形) に表示し，y で先に積分するタイプの累次積分で表せ (計算は実行しなくてもよい)。

(3) D をを適当な領域 D_1 および D_2 に分割し，それぞれを横線型 ($D=\{\,a \leqq y \leqq b, g_1(y) \leqq x \leqq g_2(y)\,\}$ の形) に表示し，x で先に積分するタイプの累次積分で表せ (計算は実行しなくてもよい)。

(4) I を求めよ。

$\boxed{\mathbf{8}}$ 次の重積分について考える。ただし $D=\{0 \leqq y \leqq x \leqq 1\}$ とする。

$$I=\iint_D e^{-x^2}dxdy$$

(1) 領域 D を図示せよ。

(2) D をを横線形 ($\{\,(x,y)\,|\,a \leqq y \leqq b, g_1(y) \leqq x \leqq g_2(y)\,\}$ の形のもの) の形で表せ。

(3) 重積分 I を x を先に計算する形の累次積分で表せ (計算を実行しなくてもよい)。

(4) D を縦線形 ($\{\,(x,y)\,|\,a \leqq x \leqq b, g_1(x) \leqq y \leqq g_2(x)\,\}$ の形のもの) の形で表せ。

(5) 重積分 I を y を先に積分する形の累次積分で表せ。

(6) I を求めよ。

$\boxed{\mathbf{9}}$ 重積分

$$I=\iint_D \sqrt{1-x^2-y^2}dxdy \qquad (D=\{\,x^2+y^2 \leqq x\,\})$$

を次に従って計算せよ。

(1) $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$ とおいて変数変換を行う。D に対応する r–θ 平面の領域 E を求めよ。

(2) この対応で一対一でない部分を求めよ。

(3) ヤコビアン $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}$ を計算せよ (計算過程も書くこと)。

(4) I を求めよ。計算途中で

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3\theta d\theta = \frac{2}{3}$$

を使用してもよい。

$\boxed{\mathbf{10}}$ k を自然数とする。広義積分

$$I = \iint_D \frac{1}{(x^2+y^2)^k} dxdy \qquad (D = \left\{\, x^2+y^2 \geqq 1, x \geqq 0, y \geqq 0 \,\right\})$$

を次に従って計算せよ。

(1) $\{A_n\}$ が D の近似増加列であることの定義を述べよ。

(2) $A_n = \left\{\, 1 \leqq x^2+y^2 \leqq n^2, x \geqq 0, y \geqq 0 \,\right\}$ とし，$J_n = \displaystyle\iint_{A_n} \frac{1}{(x^2+y^2)^k} dxdy$ とするとき，I を J_n を用いて表せ。このとき極限記号 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}$ を用いてよい。

(3) J_n を計算するため $x = r\cos\theta$，$y = r\sin\theta$ とおいて変数変換を行う。A_n に対応する r–θ 平面の領域 E_n を求めよ。

(4) この対応で一対一でない部分を求めよ。

(5) ヤコビアン $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}$ を計算せよ (計算過程も書くこと)。

(6) J_n を求めよ。

(7) 広義積分が存在する場合はそれを求め，収束しないときはそのことを示せ。

$\boxed{\mathbf{11}}$ k を自然数とする。広義積分

$$I = \iint_D \frac{1}{(x^2+y^2)^k} dxdy \qquad (D = \left\{\, 0 < x^2+y^2 \leqq 1 \,\right\})$$

を次に従って計算せよ。

(1) $\{A_n\}$ が D の近似増加列であることの定義を述べよ。

(2) $A_n = \left\{ \left(\dfrac{1}{n}\right)^2 \leqq x^2+y^2 \leqq 1 \right\}$ とし，$J_n = \displaystyle\iint_{A_n} \frac{1}{(x^2+y^2)^k} dxdy$ とするとき，I を J_n を用いて表せ。このとき極限記号 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}$ を用いてよい。

(3) J_n を計算するため $x = r\cos\theta$，$y = r\sin\theta$ とおいて変数変換を行う。A_n に対応する r–θ 平面の領域 E_n を求めよ。

(4) この対応で一対一でない部分を求めよ。

(5) ヤコビアン $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}$ を計算せよ (計算過程も書くこと)。

(6) J_n を求めよ。

(7) 広義積分が存在する場合はそれを求め，収束しないときはそのことを示せ。

12 3 重積分

$$I = \iiint_D xyz\,dxdydz \quad (D = \left\{ \sqrt{x^2+z^2} \leqq y \leqq 1, x \geqq 0, z \geqq 0 \right\})$$

を次に従って求めよ。

(1) D_y を y 座標が y である平面と D との共通部分とする。D_y を x–z 平面内に図示せよ。また x–z 平面内の領域として縦線型に表示せよ。縦線型とは $D_y = \{ a \leqq x \leqq b, g_1(x) \leqq z \leqq g_2(x) \}$ のことである。

(2) 3 重積分 I を累次積分の形に表示せよ。

(3) I を求めよ。

13 $D = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x^2+y^2+z^2 \leqq 1, x \geqq 0, y \geqq 0, z \geqq 0 \right\}$ の体積を次に従って求めよう。

(1) $x = r\sin\theta\cos\varphi,\ y = r\sin\theta\sin\varphi,\ z = r\cos\theta$ とおく。D に対応する (r,θ,φ) 空間の領域 E を求めよ。

(2) この対応で一対一でない E の部分を求めよ。

(3) この対応のヤコビアンを計算せよ。計算過程も記述すること。

(4) 変数変換が可能なための条件を述べよ。今の場合その条件が満たされていることを示せ。

(5) 3 重積分 $V = \iiint_D dxdydz$ を r,θ,φ に関するの積分に変数変換せよ。

(6) V を求めよ。

14 $D = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x^2+y^2+z^2 \leqq 1 \right\}$ の体積を次に従って求めよう。

(1) $x = r\sin\theta\cos\varphi,\ y = r\sin\theta\sin\varphi,\ z = r\cos\theta$ とおく。D に対応する (r,θ,φ) 空間の領域 E を求めよ。

(2) この対応で一対一でない E の部分を求めよ。

(3) この対応のヤコビアンを計算せよ。計算過程も記述すること。

(4) 変数変換が可能なための条件を述べよ。今の場合その条件が満たされていることを示せ。

(5) 3 重積分 $V = \iiint_D dxdydz$ を r,θ,φ に関するの積分に変数変換せよ。

(6) V を求めよ。