

3 1 変数関数の不定積分と微分方程式

ここでは微分方程式を解くために必要な1変数関数の不定積分についてのみ扱う。定積分は解析学IIで扱うが、定積分と不定積分の違いに関して一言だけふれておく。高校では不定積分(原始関数)を用いて定積分が定義されていた。これは便法と考えるべきで、厳密には正しい定義とは言えない。

不定積分は微分の逆として定義されるものであるが、定積分は求積法と関係して定義されるものであり、直接には不定積分とは無関係である。定義としては無関係の両者の関係にニュートン・ライプニッツが独立に気づいたとき微積分学が成立したといえる。この事は解析学IIで定積分の定義のときにもう一度ふれるが、この事をきちんと理解する事が積分の理論的把握のキーポイントである。

3.1 不定積分の定義と諸性質

数学序論で積分の基本的部分は学んでいるので、ここでは簡単に復習した後、数学序論で述べなかった幾つかの計算法について学ぶ。

関数 $F(x)$ が微分可能で

$$\frac{d}{dx}F(x) = f(x)$$

となるとき、 $F(x)$ を $f(x)$ の原始関数 (primitive function) または不定積分 (indefinite integral) といい、

$$\int f(x)dx = F(x)$$

と表す。 $f(x)$ のことを被積分関数と呼ぶことがある。原始関数は $f(x)$ から一意に決まるものではないが、定数分の差しかないので、

$$\int x^2 dx = \frac{1}{3}x^3 + C$$

のように表す。この C を積分定数と呼ぶ。前期の数学序論では混乱する場合を除き通常省略したが、微分方程式を扱う場合は積分定数を書く必要がある。微分方程式に入ったら積分定数は書くことにする。またこの章の以下の部分で関数は積分可能であることを仮定し、そのことをいちいち断らないこととする。

次の諸命題に関しては前期で学んだ。

命題 3.1 [積分の線型性]

$$(1) \int \{f(x) + g(x)\} dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$$

$$(2) \int af(x)dx = a \int f(x)dx$$

このプリントも含め講義関連のプリントは <http://math.cs.kitami-it.ac.jp/~kouno/kougi.html> においてある。

命題 3.2 [いくつかの関数の不定積分]

$$\begin{aligned} (1) \int x^a dx &= \frac{1}{a+1} x^{a+1} \quad (a \neq -1) & (2) \int \frac{1}{x} dx &= \log |x| \\ (3) \int \cos x dx &= \sin x & (4) \int \sin x dx &= -\cos x \\ (5) \int e^x dx &= e^x & (6) \int a^x dx &= \frac{a^x}{\log a} \\ (7) \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx &= \arcsin x & (8) \int \frac{1}{1+x^2} dx &= \arctan x \end{aligned}$$

定理 3.3 [置換積分法] $x = \varphi(t)$ とすると,

$$\int f(x) dx = \int f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt$$

置換積分は色々な場合に色々な形の変数変換が考案されている。詳しくは??節で扱う。

定理 3.4 [部分積分法]

$$\int f'(x)g(x) dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x) dx$$

3.2 諸計算 I (有理関数の不定積分)

有理関数は 2 次式または 1 次式に因数分解できれば, 積分を我々の知っている関数 (初等関数) で書く事ができる。積分方法を一般的に述べるのではなく, 具体例を取り上げて積分方法が分かる様に実行する事にする。 $I = \int \frac{x^4 + x^3 - x - 4}{x^3 - 1} dx$ を例にとる。

(1) 仮分数を帯分数へ

最初に分子の次数が分母の次数より大きければ帯分数の形にして分子の次数を小さくする。

$$\frac{x^4 + x^3 - x - 4}{x^3 - 1} = x + 1 - \frac{3}{x^3 - 1}$$

なので, $\frac{3}{x^3 - 1}$ の積分を求めればよい。

(2) 部分分数展開

部分分数展開をするために分母を因数分解する。

$$x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1)$$

となる。

$$\frac{3}{x^3 - 1} = \frac{a}{x - 1} + \frac{bx + c}{x^2 + x + 1}$$

を満たす定数 a, b, c を見つける。分母を払うと $3 = a(x^2 + x + 1) + (bx + c)(x - 1)$ が恒等的に成立しているので, $a = 1, b = -1, c = -2$ である。よって

$$\int \frac{3}{x^3 - 1} dx = \int \frac{1}{x - 1} dx - \int \frac{x + 2}{x^2 + x + 1} dx$$

となる。

(3) 積分の実行

$\int \frac{1}{1\text{次式}} dx$ の積分は問題なし。実数の範囲で因数分解できない 2 次式に対し、 $\frac{1\text{次式}}{2\text{次式}}$ の積分は

$$\frac{1\text{次式}}{2\text{次式}} = A \frac{(2\text{次式})'}{2\text{次式}} + B \frac{1}{2\text{次式}}$$

と変形する。

$$\frac{x+2}{x^2+x+1} = \frac{1}{2} \frac{2x+1}{x^2+x+1} + \frac{3}{2} \frac{1}{x^2+x+1} = \frac{1}{2} \frac{(x^2+x+1)'}{x^2+x+1} + \frac{3}{2} \frac{1}{x^2+x+1}$$

となる。 $t = x^2 + x + 1$ とおくと $\frac{dt}{dx} = 2x + 1$ より

$$\begin{aligned} \int \frac{2x+1}{x^2+x+1} dx &= \int \frac{2x+1}{t} \frac{dx}{dt} dt = \int \frac{2x+1}{t} \frac{1}{2x+1} dt \\ &= \int \frac{1}{t} dt = \log t = \log(x^2+x+1) \end{aligned}$$

となる。よってあとは $\int \frac{1}{x^2+x+1} dx$ が求まればよい。

$x^2+x+1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$ となるので $u = x + \frac{1}{2}$ と変数変換すると $\int \frac{1}{x^2+x+1} dx = \int \frac{1}{u^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} du = \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2}{\sqrt{3}} u = \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2}{\sqrt{3}} \left(x + \frac{1}{2}\right)$ となる。以上を合わせると

$$I = \frac{x^2}{2} + x - \log|x-1| + \frac{1}{2} \log(x^2+x+1) + \sqrt{3} \arctan \frac{2x+1}{\sqrt{3}}$$

(4) 少し理論的に

任意の有理関数の不定積分が初等関数で表されるかどうかを考えてみる。

一般の有理関数を $R(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ とする。(1) の操作で分子の次数は分母の次数より小さいと仮定してよい。次に $g(x)$ の因数分解を実行する。アルゴリズムは存在しないが、実数の範囲で 1 次式または 2 次式に因数分解される事が知られている (代数学の基本定理)。同じ因数が 2 個以上存在する場合もあるので、部分分数を実行すると、次の形の関数の和になっている。

$$\frac{f_1(x)}{(x+a)^n}, \quad \frac{f_2(x)}{(x^2+ax+b)^n}$$

分母が $(x^2+ax+b)^n$ の場合は変数変換で $(x^2+a^2)^n$ と仮定してよい。分子を $(x+a)$ または (x^2+a^2) で展開することにより、 $\frac{f_1(x)}{(x+a)^n} = \frac{a_1}{x+a} + \dots + \frac{a_n}{(x+a)^n}$, $\frac{f_2(x)}{(x^2+a^2)^n} = \frac{b_1x+c_1}{x^2+a^2} + \dots + \frac{b_nx+c_n}{(x^2+a^2)^n}$ とできる。以上により次の 3 つの積分ができればよい事が分かる。

$$\int \frac{1}{(x+a)^n} dx, \quad \int \frac{x}{(x^2+a^2)^n} dx, \quad \int \frac{1}{(x^2+a^2)^n} dx$$

1 番目は $u = x + a$, 2 番目は $u = x^2 + a^2$ と置けばすぐできる。3 番目の積分を直接与えるのは難しいが次の漸化式により計算することができる。

$$J_n = \int \frac{1}{(x^2 + a^2)^n} dx \text{ とおくと, 漸化式}$$

$$J_{n+1} = \frac{1}{2na^2} \left\{ \frac{x}{(x^2 + a^2)^n} + (2n - 1)J_n \right\}$$

が成立するので (\rightarrow 演習問題 ??), この式により順次計算する事ができる。

演習問題 *3.1

(1) $I_n = \int \cos^n t dt$ とする。 $\cos^n t = \cos^{n-2} t \cos^2 t = \cos^{n-2} t (1 - \sin^2 t)$ を持ちいることにより漸化式

$$I_n = \frac{1}{n} \cos^{n-1} t \sin t + \frac{n-1}{n} I_{n-2}$$

を示せ。

(2) $J_n = \int \frac{1}{(x^2 + a^2)^n} dx$ とする。 $x = a \tan t$ とおくことにより

$$J_n = \frac{1}{a^{2n-1}} I_{2n-2}$$

が成立することを示せ。

(3)

$$J_{n+1} = \frac{1}{2na^2} \left\{ \frac{x}{(x^2 + a^2)^n} + (2n - 1)J_n \right\}$$

が成立することを示せ。

演習問題 3.2 次の関数の不定積分を求めよ。

(1) $\frac{1}{x(x-1)}$

(2) $\frac{2x}{(x+1)(x-1)}$

(3) $\frac{x^2+1}{x(x-1)^2}$

(4) $\frac{x^3}{(x+1)^2}$

(5) $\frac{1}{x(x^4-1)}$

(6) $\frac{1}{(x^2+1)^2}$

(7) $\frac{x-1}{x^2+2x+2}$

(8) $\frac{1}{x^3+1}$

(9) $\frac{1}{x^4+1}$