解析学 I 要綱 #10

2009–1–28 河野

3.3 諸計算 II(置換積分)

1 3 角関数の有理関数

$\int R(\sin x, \cos x)dx$ の形の積分，ただしここで $R(s,t)$ は s と t の有理関数。

$t = \tan(x/2)$ とおくと，$dx = \dfrac{2}{1+t^2}dt$,$\sin x = \dfrac{2t}{1+t^2}$, $\cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$ なので，

$$\int R(\sin x, \cos x) = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2}{1+t^2}dt$$

となり有理関数の積分に帰着できる。

$I = \int \dfrac{1}{\sin x}dx$ は $t = \tan\left(\dfrac{x}{2}\right)$ と置くと，

$$I = \int \frac{1+t^2}{2t}\frac{2}{1+t^2}dt = \int \frac{1}{t}dt = \log|t| = \log\left|\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right|$$

となる。

これは**万能であるが最善の方法とは限らない**。例えば，$\tan x$ で表される時は $t = \tan x$ と置く方が一般に簡単になる。

$I = \int (\tan x)^2 dx$ の場合 $t = \tan\left(\dfrac{x}{2}\right)$ と置いても出来るが，計算は少し面倒である。このとき $t = \tan x$ と置くと，$\dfrac{dt}{dx} = \dfrac{1}{(\cos x)^2} = 1 + (\tan x)^2 = 1 + t^2$ なので

$$I = \int t^2 \frac{1}{1+t^2}dt = \int \frac{1+t^2-1}{1+t^2} = \int dt - \int \frac{1}{1+t^2}dt = t - \arctan t = \tan x - x$$

となる。

一方 $t = \tan\left(\dfrac{x}{2}\right)$ とおくと

$$\begin{aligned}
I &= \int \left(\frac{2t}{1-t^2}\right)^2 \frac{2}{1+t^2}dt = \int \frac{8t^2}{(1-t)^2(1+t)^2(1+t^2)}dt \\
&= \int \left\{\frac{1}{(t+1)^2} + \frac{1}{(t-1)^2} - \frac{2}{1+t^2}\right\}dt \\
&= -\frac{1}{t+1} - \frac{1}{t-1} - 2\arctan t \\
&= -\frac{1}{\tan\dfrac{x}{2}+1} - \frac{1}{\tan\dfrac{x}{2}-1} - 2\arctan\left(\tan\frac{x}{2}\right)
\end{aligned}$$

となる。前者の方が計算は簡単であろう。

このプリントも含め講義関連のプリントは http://math.cs.kitami-it.ac.jp/~kouno/kougi.html においてある。

演習問題 3.3　次の関数の不定積分を求めよ。

(1) $\sin x \cos x$　(2) $\sin^3 x$　(3) $\dfrac{1}{\cos x}$

(4) $\dfrac{1}{\tan x}$　(5) $\dfrac{1}{1+\sin x}$　(6) $\dfrac{1}{\sin x - \cos x}$

$\boxed{2}$ ルートの中の 2 次式 (1)—3 角関数

$\displaystyle\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right) dx$ の形の積分，ただし，ここで $R(s,t)$ は s と t の有理関数。2 通りの方法で計算をする。最初は 3 角関数を用いて変換するものを紹介し，次に無理式を用いるものを紹介する。3 角関数を用いる変換の場合 2 次式はあらかじめ $a^2-x^2, x^2+a^2, x^2-a^2$ のいずれかの形に変形されているものとする。

(1) $\displaystyle\int R\left(x, \sqrt{a^2-x^2}\right) dx$

$x = a\sin t$ と置くと，

$$\int R\left(x, \sqrt{a^2-x^2}\right) dx = \int R\left(a\sin t, a\cos t\right) a\cos t dt$$

(2) $\displaystyle\int R\left(x, \sqrt{x^2+a^2}\right) dx$

$x = a\tan t$ と置くと，

$$\int R\left(x, \sqrt{x^2+a^2}\right) dx = \int R\left(a\tan t, \frac{a}{\cos t}\right) \frac{a}{\cos^2 t} dt$$

(3) $\displaystyle\int R\left(x, \sqrt{x^2-a^2}\right) dx$

$x = \dfrac{a}{\sin t}$ と置くと，

$$\int R\left(x, \sqrt{x^2-a^2}\right) dx = -\int R\left(\frac{a}{\sin t}, \frac{a\cos t}{\sin t}\right) \frac{a\cos t}{\sin^2 t}\, dt$$

いずれの場合も 3 角関数の有理関数に帰着できる。

演習問題 3.4　次の関数の不定積分を求めよ。

(1) $\dfrac{1}{\sqrt{2-3x^2}}$　(2) $\dfrac{1}{\sqrt{3+2x-x^2}}$　(3) $\dfrac{1}{x\sqrt{3x^2-2}}$

(4) $\dfrac{1}{x^2+x+1}$　(5) $\sqrt{a^2-x^2}\quad (a>0)$

$\boxed{3}$ ルートの中の 2 次式 (2)—無理関数

無理式を用いてルートの中に 2 次式がある場合の積分 $\displaystyle\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right) dx$ を求める。

(1) $a>0$ の場合

$\sqrt{ax^2+bx+c} = t - \sqrt{a}x$ と置くと，$x = \dfrac{t^2-c}{2\sqrt{a}t+b}$, $dx = \dfrac{2\sqrt{a}t^2+2bt+2\sqrt{a}c}{(2\sqrt{a}t+b)^2}dt$, $t-\sqrt{a}x = \dfrac{\sqrt{a}t^2+bt+c}{2\sqrt{a}t+b}$ となるので

$$\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right) dx = \int R\left(\frac{t^2-c}{2\sqrt{a}t+b}, \frac{\sqrt{a}t^2+bt+c}{2\sqrt{a}t+b}\right) \frac{2\sqrt{a}t^2+2bt+2\sqrt{a}c}{(2\sqrt{a}t+b)^2}dt$$

(2) $ax^2+bx+c=0$ が 2 解 $\alpha, \beta(\alpha<\beta)$ を持つ時。$a>0$ の場合もできるがここでは $a<0$ とする。$ax^2+bx+c=a(x-\alpha)(x-\beta)$ となる。$t=\sqrt{\dfrac{a(x-\beta)}{x-\alpha}}$ または同じことだが $\sqrt{ax^2+bx+c}=t(x-\alpha)$ と置くと，$x=\dfrac{\alpha t^2-a\beta}{t^2-a}$, $x-\alpha=\dfrac{a(\alpha-\beta)}{t^2-a}$, $\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{2a(\beta-\alpha)t}{(t^2-a)^2}$ より，

$$\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx=\int R\left(\frac{\alpha t^2-a\beta}{t^2-a}, \frac{a(\alpha-\beta)t}{t^2-a}\right)\frac{2a(\beta-\alpha)t}{(t^2-a)^2}dt$$

を得る。

演習問題 3.5　次の関数の不定積分を求めよ。

(1) $\dfrac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$　(2) $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}$　(3) $\sqrt{x^2+a}$

(4) $x^2\sqrt{a^2-x^2}$

方法の違いで結果が一見違うように見える時もある。例えば，$I=\displaystyle\int\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}dx$ を考える。3 角関数で置換すると，

$$I=I_1=-\arcsin\frac{1}{x}$$

となるが，無理式を用いると，

$$I=I_2=2\arctan(x+\sqrt{x^2-1})$$

となる。見かけは違うが，実は $I_2=\pi+I_1$ となっている。

演習問題 3.6　今までは学んだ事に対応する演習問題で，演習問題の場所によってどの方法を使うかというのは明らかであった。最後に色々なタイプを混ぜて演習問題とする。積分計算の手法を身につけるのが目的なのですべてを解く必要はない。また中には難問もある。嗅覚を働かせてそれを避ける練習にもなるかもしれない。

次の関数の不定積分を求めよ。

(1) $\dfrac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}$　(2) $\cos^2 x-\sin^2 x$　(3) $\dfrac{x}{(1+x^2)^{3/2}}$

(4) $x\arcsin x$　(5) $\dfrac{\cos 2x}{e^{3x}}$　(6) xe^{-x}

(7) $x\cos x$　(8) $x^2\sin x$　(9) e^{3x+1}

(10) $2x\arctan x$　(11) $\log(2x+1)$　(12) $\dfrac{1}{x(\log x)^n}$

(13) $x^2\log x$　(14) xe^{2x^2+3}　(15) $\dfrac{e^x}{x}+e^x\log x$

(16) $\arcsin\sqrt{\dfrac{x}{x+1}}$　(17) $(2x+1)\sin(x^2+x+1)$　(18) $\cos^n x\sin x$

(19) $(ax^2+bx+c)e^x$　(20) $\dfrac{\arcsin x}{(1-x^2)^{3/2}}$　(21) $\dfrac{x\arcsin x}{(1+x^2)^2}$

(22) $\sin(\log x)$　(23) x^3e^x　(24) x^4e^x

(25) $\dfrac{1}{x^4+x^2+1}$ (26) $\dfrac{1}{1+x^2}$ (27) $\dfrac{1}{(1+x)^2(x^2+1)}$

(28) $\dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}}$ (29) $\dfrac{1}{\cos^8 x}$ (30) $\dfrac{1}{\sin x\cos^5 x}$

(31) $\dfrac{1+\sin x}{\sin x(1+\cos x)}$ (32) $\dfrac{x}{\sqrt{a-x}}$ (33) $\dfrac{(a+bx^3)^{3/2}}{x}$

(34) $\dfrac{1}{3+\cos x}$ (35) $\dfrac{\sin x}{1+\sin x+\cos x}$ (36) $\dfrac{1}{(e^x+e^{-x})^4}$

(37) $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ (38) $\sqrt{x^2-1}$ (39) $\dfrac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}$

(40) $\dfrac{1}{x^2\sqrt{1+x^2}}$ (41) $\dfrac{1-x^2}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}$ (42) $\dfrac{1}{(x+1)\sqrt{x^2+2x-1}}$

(43) $\dfrac{1}{1+x\sqrt{1+x^2}}$ (44) $\sqrt{x+\sqrt{x^2+2}}$ (45) $\dfrac{1-2x}{(3-2x)\sqrt{1-x^2}}$

(46) $\dfrac{1}{(4-3x^2)\sqrt{3+4x^2}}$ (47) $\dfrac{1}{x^4\sqrt{a^2+x^2}}$ (48) $\dfrac{1}{x\sqrt{1+x^6}}$

(49) $\dfrac{1}{4+x^2}$ (50) $\dfrac{1}{1+\sqrt[3]{x+1}}$ (51) $\dfrac{x(x^2+3)}{(x^2-1)(x^2+1)^2}$

(52) $3x^2e^{x^3+1}$ (53) $\dfrac{1}{x^3(x+1)}$ (54) $\dfrac{2x^2+x+4}{x(x^2+2)^2}$

(55) $\dfrac{x^4-x^3-3x^2-x}{(x^2+1)^3}$ (56) $\dfrac{x^4-x^3+2x+1}{x^4-x^3-x+1}$ (57) $\dfrac{3}{x^3-1}$

(58) $\dfrac{1}{e^x+4e^{-x}+3}$ (59) $\dfrac{\sin^2 x}{1+3\cos^2 x}$ (60) $\dfrac{1}{e^x+e^{-x}}$

(61) $\dfrac{\sin x\cos x}{\sin^4 x+\cos^4 x}$ (62) $\dfrac{1}{a\sin^2 x+b\cos^2 x}$ (63) $\dfrac{1}{a\cos x+b\sin x}$

(64) $\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$ (65) $\dfrac{\sqrt{x}}{1+x}$ (66) $\dfrac{1}{2-\tan^2 x}$

(67) $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+4}}$ (68) $\dfrac{\cos x}{\sin^n x}$ (69) $\dfrac{1}{(2+x)\sqrt{1-x^2}}$

(70) $\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ (71) $\dfrac{\log(\log x)}{x}$ (72) $\dfrac{x^2}{\sqrt[3]{a^3+x^3}}$

(73) $\dfrac{1}{(1+x)\sqrt{1-x}}$ (74) $\dfrac{\sqrt{x-1}}{x\sqrt{x+1}}$ (75) $\dfrac{12}{x^3-8}$

(76) $\dfrac{\sin x}{1+\sin x}$ (77) $\dfrac{1}{a+b\sin x}$ (78) $\sin 4x$

(79) $\dfrac{1}{\cos x(5+3\cos x)}$ (80) $\dfrac{x^2}{1+x^2}\arctan x$ (81) $\dfrac{\sin x}{3+\tan^2 x}$

(82) $\log(1+\sqrt{x})$ (83) $\dfrac{1+\sqrt{1+x}}{1-\sqrt{x}}$ (84) $\dfrac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}}$

(85) $3x^2(x^3+5)^6$ (86) $\dfrac{1}{(x+2)\sqrt{2+x-x^2}}$ (87) $\dfrac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}$

(88) $e^{ax}\cos bx$ (89) $e^{ax}\sin bx$