次の問に答えよ

(1) 関数 $y = f(x) = \dfrac{1}{x+2}$ の導関数，2 次導関数および 3 次導関数を求めよ。

$f'(x) = -(x+2)^{-2}$，$f''(x) = 2(x+2)^{-3}$，$f'''(x) = -6(x+2)^{-4}$ となる。

(2) n 次導関数の形を予想し，その予想を数学的帰納法で証明せよ。

$f^{(n)} = (-1)^n n!(x+2)^{-(n+1)}$ と予想される。これを数学的帰納法で証明する。

(a) $n = 1$ のとき：

$$f^{(1)}(x) \;=\; f'(x) = -(x+2)^{-2} = (-1)^1 1!(x+2)^{-(1+1)}$$

となるので成立している。

(b) $n = k$ のとき成立を仮定；即ち $f^{(k)}(x) = (-1)^k k!(x+2)^{-(k+1)}$ の成立を仮定する。これを微分すると

$$\begin{aligned} f^{(k+1)}(x) &= \left(f^{(k)}(x)\right)' = \left((-1)^k k!(x+2)^{-(k+1)}\right)' \\ &= (-1)^k k!\left(-(k+1)\right)(x+2)^{-(k+2)} \\ &= (-1)^{k+1} k!(k+1)(x+2)^{-(k+2)} \\ &= (-1)^{k+1}(k+1)!(x+2)^{-(k+2)} \end{aligned}$$

となり，$k+1$ でも成立している。

(3) 関数 $y = f(x) = \dfrac{1}{x+2}$ を $x = 1$ でテーラー級数展開せよ。

$f(1) = \dfrac{1}{3}$，$f^{(k)}(1) = (-1)^k k!(1+2)^{-(k+1)} = (-1)^k \dfrac{k!}{3^{k+1}}$ なので

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} f^{(k)}(1)(x-1)^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}(-1)^k \frac{k!}{3^{k+1}}(x-1)^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{3^{k+1}}(x-1)^k \end{aligned}$$

となる。

学科		在籍番号		氏名	