

演習問題 *3.1

- (1) $I_n = \int \cos^n t dt$ とする。 $\cos^n t = \cos^{n-2} t \cos^2 t = \cos^{n-2} t (1 - \sin^2 t)$ を持ちいることにより漸化式

$$I_n = \frac{1}{n} \cos^{n-1} t \sin t + \frac{n-1}{n} I_{n-2}$$

を示せ。

- (2) $J_n = \int \frac{1}{(x^2 + a^2)^n} dx$ とする。 $x = a \tan t$ とおくことにより

$$J_n = \frac{1}{a^{2n-1}} I_{2n-2}$$

が成立することを示せ。

- (3)
$$J_{n+1} = \frac{1}{2na^2} \left\{ \frac{x}{(x^2 + a^2)^n} + (2n-1)J_n \right\}$$

が成立することを示せ。

(1)

$$\begin{aligned} I_n &= \int \cos^n t dt = \int \cos^{n-2} t (1 - \sin^2 t) dt = \int \cos^{n-2} t dt - \int \cos^{n-2} t \sin^2 t dt \\ &= I_{n-2} - \int \cos^{n-2} t \sin^2 t dt = I_{n-2} - \int \cos^{n-2} t \sin t \cdot \sin t dt \\ &= I_{n-2} - \int \left(-\frac{1}{n-1} \cos^{n-1} t \right)' \sin t dt \\ &= I_{n-2} + \frac{1}{n-1} \cos^{n-1} t \sin t - \int \frac{1}{n-1} \cos^{n-1} t \cos t dt \\ &= I_{n-2} + \frac{1}{n-1} \cos^{n-1} t \sin t - \frac{1}{n-1} I_n \end{aligned}$$

より

$$I_n = \frac{1}{n} \cos^{n-1} t \sin t + \frac{n-1}{n} I_{n-2}$$

が従う。

- (2) $x = a \tan t$ とおくと $\frac{dx}{dt} = \frac{a}{\cos^2 t}$ である。また

$$x^2 + a^2 = a^2 \tan^2 t + a^2 = a^2 \left(\frac{\sin^2 t}{\cos^2 t} + 1 \right) = \frac{a^2}{\cos^2 t}$$

となるので、

$$J_n = \int \frac{1}{(x^2 + a^2)^n} dx = \int \left(\frac{\cos^2 t}{a^2} \right)^n \frac{dx}{dt} dt$$

$$\begin{aligned}
&= \int \left(\frac{\cos^2 t}{a^2} \right)^n \frac{a}{\cos^2 t} dt = \frac{1}{a^{2n-1}} \int \cos^{2n-2} t dt \\
&= \frac{1}{a^{2n-1}} I_{2n-2}
\end{aligned}$$

となる。

(3)

$$\begin{aligned}
J_{n+1} &= \frac{1}{a^{2n+1}} I_{2n} = \frac{1}{a^{2n+1}} \left(\frac{1}{2n} \cos^{2n-1} t \sin t + \frac{2n-1}{2n} I_{2n-2} \right) \\
&= \frac{1}{2na^{2n+2}} \cos^{2n} t \cdot a \frac{\sin t}{\cos t} + \frac{1}{a^{2n+1}} \frac{2n-1}{2n} a^{2n-1} J_n \\
&= \frac{1}{2na^{2n+2}} \left(\frac{a^2}{x^2+a^2} \right)^{2n} a \frac{\sin t}{\cos t} + \frac{1}{a^{2n+1}} \frac{2n-1}{2n} a^{2n-1} J_n \\
&= \frac{1}{2na^2} \left(\frac{1}{x^2+a^2} \right)^{2n} x + \frac{1}{a^2} \frac{2n-1}{2n} J_n \\
&= \frac{1}{2na^2} \left(\frac{x}{(x^2+a^2)^n} + (2n-1) J_n \right)
\end{aligned}$$

となる。

演習問題 3.2 次の関数の不定積分を求めよ。

(1) $\frac{1}{x(x-1)}$

(2) $\frac{x^2+1}{x(x-1)^2}$

(3) $\frac{x^3}{(x+1)^2}$

(4) $\frac{1}{x(x^4-1)}$

(5) $\frac{1}{(x^2+1)^2}$

(6) $\frac{x-1}{x^2+2x+2}$

(7) $\frac{1}{x^3+1}$

(8) $\frac{1}{x^4+1}$

不定積分は結果が得られたときその正誤をチェックすることは易しい。即ち、結果の関数を微分して被積分関数になればよい。よって結果の関数を書くことはしない。どのような方法で解いているかということのみ述べる。

(1) $\frac{A}{x} + \frac{B}{x-1}$ と部分分数展開する。

(2) $\frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{(x-1)^2}$ とするか、直接 $\frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2}$ と部分分数展開する。

(3) 分子の次数の方が高いので割り算をした後で、 $\frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2}$ と部分分数展開する。

(4) $x^4-1 = (x^2-1)(x^2+1) = (x-1)(x+1)(x^2+1)$ と因数分解できるので、 $\frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+1} + \frac{Dx+E}{x^2+1}$ と部分分数展開する。 $\frac{x}{x^2+1}$ は $\frac{x}{x^2+1} = \frac{1}{2} \frac{(x^2+1)'}{x^2+1}$ と見て積分し、 $\frac{1}{x^2+1}$ は $x = \tan t$ とおき、置換積分して求める。

(5) プリント (3.2 節 (4)) にある様に部分積分を用いて $\frac{1}{x^2+1}$ の積分に帰着させます。色々な方法があるので、自分で考えてみるのも力をつける 1 つの方法です。自力で解ければ、かなり「積分

力」がついていると思われます。

(6) $\frac{(x^2 + 2x + 2)'}{x^2 + 2x + 2}$ と $\frac{1}{x^2 + 2x + 2}$ の定数倍の和に分ける。後者は $\frac{1}{(x+1)^2 + 1}$ と見て $u = x + 1$ とおき置換積分する。その形を見れば次に何をすればよいか分かります。

(7) $x^3 + 1 = (x+1)(x^2 - x + 1)$ と因数分解できるので、 $\frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2-x+1}$ と部分分数展開する。後者は (6) と同様に $\frac{(x^2 - x + 1)'}{x^2 - x + 1}$ と $\frac{1}{x^2 - x + 1}$ の定数倍の和の形に分ける。 $\frac{1}{x^2 - x + 1}$ は $\frac{1}{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{\sqrt{3}}{4}}$ と変形して置換積分、更にもう一度置換積分する。

(8) これは因数分解が問題。 $x^4 + 1 = x^4 + 2x^2 + 1 - 2x^2 = (x^2 + 1)^2 - (\sqrt{2}x)^2 = (x^2 - \sqrt{2}x + 1)(x^2 + \sqrt{2}x + 1)$ と因数分解できる。 $\frac{Ax+B}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} + \frac{Cx+D}{x^2 + \sqrt{2}x + 1}$ と部分分数展開して、後は前問までと同様に計算する。