

**演習問題 4.3** 命題 4.5 を証明せよ。

演算子を

$$L = a_n(x)D^n + a_{n-1}(x)D^{n-1} + \cdots + a_1(x)D + a_0(x)$$

し、微分方程式を

$$Ly = 0 \tag{1}$$

とする。微分の線型性より  $D(ay) = aDy$  が成立している。さらに  $D$  を作用させることにより  $D^2(ay) = D(D(ay)) = D(aDy) = aD(Dy) = aD^2y$  が成立することが分かる。以下同様に  $D$  を作用させることにより自然数  $k$  に対し  $D^k(ay) = aD^ky$  が成立する。よって

$$\begin{aligned} L(ay) &= (a_n(x)D^n + a_{n-1}(x)D^{n-1} + \cdots + a_1(x)D + a_0(x))(ay) \\ &= a_n(x)D^n(ay) + a_{n-1}(x)D^{n-1}(ay) + \cdots + a_1(x)D(ay) + a_0(x)(ay) \\ &= aa_n(x)D^ny + aa_{n-1}(x)D^{n-1}y + \cdots + aa_1(x)Dy + aa_0(x)y \\ &= a(a_n(x)D^ny + a_{n-1}(x)D^{n-1}y + \cdots + a_1(x)Dy + a_0(x)y) \\ &= a(a_n(x)D^n + a_{n-1}(x)D^{n-1} + \cdots + a_1(x)D + a_0(x))y \\ &= aLy \end{aligned}$$

が成立する。よって  $y$  が線型微分方程式 (1) の解ならば  $ay$  も (1) の解である。

微分の線型性より  $D(y_1 + y_2) = Dy_1 + Dy_2$  が成立している。さらに  $D$  を作用させることにより  $D^2(y_1 + y_2) = D(D(y_1 + y_2)) = D(Dy_1 + Dy_2) = DDy_1 + DDy_2 = D^2y_1 + D^2y_2$  が成立することが分かる。以下同様に  $D$  を作用させることにより自然数  $k$  に対し  $D^k(y_1 + y_2) = D^ky_1 + D^ky_2$  が成立する。よって

$$\begin{aligned} L(y_1 + y_2) &= (a_n(x)D^n + a_{n-1}(x)D^{n-1} + \cdots + a_1(x)D + a_0(x))(y_1 + y_2) \\ &= a_n(x)D^n(y_1 + y_2) + a_{n-1}(x)D^{n-1}(y_1 + y_2) + \cdots + a_1(x)D(y_1 + y_2) + a_0(x)(y_1 + y_2) \\ &= a_n(x)(D^ny_1 + D^ny_2) + a_{n-1}(x)(D^{n-1}y_1 + D^{n-1}y_2) + \cdots + a_1(x)(Dy_1 + Dy_2) + a_0(x)(y_1 + y_2) \\ &= a_n(x)D^ny_1 + a_{n-1}(x)D^{n-1}y_1 + \cdots + a_1(x)Dy_1 + a_0(x)y_1 \\ &\quad + a_n(x)D^ny_2 + a_{n-1}(x)D^{n-1}y_2 + \cdots + a_1(x)Dy_2 + a_0(x)y_2 \\ &= (a_n(x)D^n + a_{n-1}(x)D^{n-1} + \cdots + a_1(x)D + a_0(x))y_1 \\ &\quad + (a_n(x)D^n + a_{n-1}(x)D^{n-1} + \cdots + a_1(x)D + a_0(x))y_2 \\ &= Ly_1 + Ly_2 \end{aligned}$$

が成立する。よって  $y_1$  および  $y_2$  が線型微分方程式 (1) の解ならば  $y_1 + y_2$  も (1) の解である。

**演習問題 4.4** 次の微分方程式を演算子法を用いて解け。ただし解関数は複素数値関数でもよいとする。

$$(1) y' + y \sin x = 0$$

$$(2) y' + (x + 1)y = 0$$

$$(3) y' + e^{2x}y = 0$$

$$(4) y'' - 5y' + 6y = 0$$

$$(5) y'' - y' - 6y = 0$$

$$(6) y'' + y = 0$$

$$(7) y'' + 4y = 0$$

$$(8) y'' - 2y' + y = 0$$

$$(9) y'' + 4y' + 4y = 0$$

(1) 与えられた微分方程式は演算子を用いて

$$(D + \sin x)y = 0$$

と書き直すことができる。  $\int \sin x dx = -\cos x$  より

$$e^{\cos x} D e^{-\cos x} = D + \sin x$$

が成立する。よって微分方程式は

$$e^{\cos x} D e^{-\cos x} y = 0$$

となる。両辺に左から  $e^{-\cos x}$  をかけると

$$D(e^{-\cos x})y = 0$$

となる。両辺を  $x$  で積分すると

$$e^{-\cos x} y = C$$

となるので

$$y = C e^{\cos x}$$

である。

(2) 与えられた微分方程式は演算子を用いて

$$(D + (x + 1))y = 0$$

と書き直すことができる。  $\int (x + 1) dx = \frac{1}{2}x^2 + x$  より

$$\exp\left(-\frac{1}{2}x^2 - x\right) D \exp\left(\frac{1}{2}x^2 + x\right) = D + (x + 1)$$

が成立する。よって微分方程式は

$$\exp\left(-\frac{1}{2}x^2 - x\right) D \exp\left(\frac{1}{2}x^2 + x\right) y = 0$$

となる。両辺に左から  $\exp\left(\frac{1}{2}x^2 + x\right)$  をかけると

$$D\left(\exp\left(\frac{1}{2}x^2 + x\right)\right) y = 0$$

となる。両辺を  $x$  で積分すると

$$\exp\left(\frac{1}{2}x^2 + x\right) y = C$$

となるので

$$y = C \exp\left(-\frac{1}{2}x^2 - x\right)$$

である。

(3) 与えられた微分方程式は演算子を用いて

$$(D + e^{2x})y = 0$$

と書き直すことができる。 $\int e^{2x} dx = \frac{1}{2}e^{2x}$  より

$$\exp\left(-\frac{1}{2}e^{2x}\right) D \exp\left(\frac{1}{2}e^{2x}\right) = D + e^{2x}$$

が成立する。よって微分方程式は

$$\exp\left(-\frac{1}{2}e^{2x}\right) D \exp\left(\frac{1}{2}e^{2x}\right) y = 0$$

となる。両辺に左から  $\exp\left(\frac{1}{2}e^{2x}\right)$  をかけると

$$D \exp\left(\frac{1}{2}e^{2x}\right) y = 0$$

となる。両辺を  $x$  で積分すると

$$\exp\left(\frac{1}{2}e^{2x}\right) y = C$$

となるので

$$y = C \exp\left(-\frac{1}{2}e^{2x}\right)$$

である。

(4) 与えられた微分方程式は演算子を用いて

$$(D^2 - 5D + 6)y = 0$$

と書き直すことができる。 $D^2 - 5D + 6 = (D - 3)(D - 2)$  なので微分方程式は  $(D - 3)(D - 2)y = 0$  となる。 $u = (D - 2)y$  とおくと  $u$  がみたす微分方程式は  $(D - 3)u = 0$  となる。

$$e^{3x} D e^{-3x} = D - 3$$

が成立するので、微分方程式は  $e^{3x} D e^{-3x} u = 0$  となるが、両辺に左から  $e^{-3x}$  をかけると  $D e^{-3x} u = 0$  となる。両辺を積分すると  $e^{-3x} u = C_1$  となるので

$$u = C_1 e^{3x}$$

である。よって  $y$  についての微分方程式は

$$(D - 2)y = C_1 e^{3x}$$

となる。

$$e^{2x}De^{-2x} = D - 2$$

が成立するので、微分方程式は  $e^{2x}De^{-2x}y = C_1e^{3x}$  となるが、両辺に左から  $e^{-2x}$  をかけると  $De^{-2x}y = C_1e^x$  となる。両辺を積分すると  $e^{-2x}y = C_1e^x + C_2$  となるので一般解は

$$y = C_1e^{3x} + C_2e^{2x}$$

となる。

(5) 与えられた微分方程式は演算子を用いて

$$(D^2 - D - 6)y = 0$$

と書き直すことができる。  $D^2 - D - 6 = (D - 3)(D + 2)$  なので微分方程式は  $(D - 3)(D + 2)y = 0$  となる。  $u = (D + 2)y$  とおくと  $u$  がみたす微分方程式は  $(D - 3)u = 0$  となる。

$$e^{3x}De^{-3x} = D - 3$$

が成立するので、微分方程式は  $e^{3x}De^{-3x}u = 0$  となるが、両辺に左から  $e^{-3x}$  をかけると  $De^{-3x}u = 0$  となる。両辺を積分すると  $e^{-3x}u = C_1$  となるので

$$u = C_1e^{3x}$$

である。よって  $y$  についての微分方程式は

$$(D + 2)y = C_1e^{3x}$$

となる。

$$e^{-2x}De^{2x} = D + 2$$

が成立するので、微分方程式は  $e^{-2x}De^{2x}y = C_1e^{3x}$  となるが、両辺に左から  $e^{2x}$  をかけると  $De^{2x}y = C_1e^{5x}$  となる。両辺を積分すると  $e^{2x}y = \frac{C_1}{5}e^{5x} + C_2$  となるので  $y = \frac{C_1}{5}e^{3x} + C_2e^{-2x}$  となる。 $\frac{C_1}{5}$  をあらためて  $C_1$  と置き直すと一般解は

$$y = C_1e^{3x} + C_2e^{-2x}$$

となる。

(6) 与えられた微分方程式は演算子を用いて

$$(D^2 + 1)y = 0$$

と書き直すことができる。  $D^2 + 1 = (D - i)(D + i)$  なので微分方程式は  $(D - i)(D + i)y = 0$  となる。  $u = (D + i)y$  とおくと  $u$  がみたす微分方程式は  $(D - i)u = 0$  となる。

$$e^{ix}De^{-ix} = D - i$$

が成立するので、微分方程式は  $e^{ix}De^{-ix}u = 0$  となるが、両辺に左から  $e^{-ix}$  をかけると  $De^{-ix}u = 0$  となる。両辺を積分すると  $e^{-ix}u = C_1$  となるので

$$u = C_1e^{ix}$$

である。よって  $y$  についての微分方程式は

$$(D + i)y = C_1 e^{ix}$$

となる。

$$e^{-ix} D e^{ix} = D + i$$

が成立するので、微分方程式は  $e^{-ix} D e^{ix} y = C_1 e^{ix}$  となるが、両辺に左から  $e^{ix}$  をかけると  $D e^{ix} y = C_1 e^{2ix}$  となる。両辺を積分すると  $e^{ix} y = \frac{C_1}{2i} e^{2ix} + C_2$  となるので  $y = \frac{C_1}{2i} e^{ix} + C_2 e^{-ix}$  となる。 $\frac{C_1}{2i}$  をあらためて  $C_1$  と置き直すと一般解は

$$y = C_1 e^{ix} + C_2 e^{-ix}$$

となる。

(7) 与えられた微分方程式は演算子を用いて

$$(D^2 + 4)y = 0$$

と書き直すことができる。 $D^2 + 4 = (D - 2i)(D + 2i)$  なので微分方程式は  $(D - 2i)(D + 2i)y = 0$  となる。 $u = (D + 2i)y$  とおくと  $u$  がみたす微分方程式は  $(D - 2i)u = 0$  となる。

$$e^{2ix} D e^{-2ix} = D - 2i$$

が成立するので、微分方程式は  $e^{2ix} D e^{-2ix} u = 0$  となるが、両辺に左から  $e^{-2ix}$  をかけると  $D e^{-2ix} u = 0$  となる。両辺を積分すると  $e^{-2ix} u = C_1$  となるので

$$u = C_1 e^{2ix}$$

である。よって  $y$  についての微分方程式は

$$(D + 2i)y = C_1 e^{2ix}$$

となる。

$$e^{-2ix} D e^{2ix} = D + 2i$$

が成立するので、微分方程式は  $e^{-2ix} D e^{2ix} y = C_1 e^{2ix}$  となるが、両辺に左から  $e^{2ix}$  をかけると  $D e^{2ix} y = C_1 e^{4ix}$  となる。両辺を積分すると  $e^{2ix} y = \frac{C_1}{4i} e^{4ix} + C_2$  となるので  $y = \frac{C_1}{4i} e^{2ix} + C_2 e^{-2ix}$  となる。 $\frac{C_1}{4i}$  をあらためて  $C_1$  と置き直すと一般解は

$$y = C_1 e^{2ix} + C_2 e^{-2ix}$$

となる。

(8) 与えられた微分方程式は演算子を用いて

$$(D^2 - 2D + 1)y = 0$$

と書き直すことができる。 $D^2 - 2D + 1 = (D - 1)(D - 1)$  なので微分方程式は  $(D - 1)(D - 1)y = 0$  となる。 $u = (D - 1)y$  とおくと  $u$  がみたす微分方程式は  $(D - 1)u = 0$  となる。

$$e^x D e^{-x} = D - 1$$

が成立するので、微分方程式は  $e^x D e^{-x} u = 0$  となるが、両辺に左から  $e^{-x}$  をかけると  $D e^{-x} u = 0$  となる。両辺を積分すると  $e^{-x} u = C_1$  となるので

$$u = C_1 e^x$$

である。よって  $y$  についての微分方程式は

$$(D - 1)y = C_1 e^x$$

となる。

$$e^x D e^{-x} = D - 1$$

が成立するので、微分方程式は  $e^x D e^{-x} y = C_1 e^x$  となるが、両辺に左から  $e^{-x}$  をかけると  $D e^{-x} y = C_1$  となる。両辺を積分すると  $e^{-x} y = C_1 x + C_2$  となるので一般解は

$$y = C_1 x e^x + C_2 e^x$$

となる。

(9) 与えられた微分方程式は演算子を用いて

$$(D^2 + 4D + 4)y = 0$$

と書き直すことができる。 $D^2 + 4D + 4 = (D + 2)(D + 2)$  なので微分方程式は  $(D + 2)(D + 2)y = 0$  となる。 $u = (D + 2)y$  とおくと  $u$  がみたす微分方程式は  $(D + 2)u = 0$  となる。

$$e^{-2x} D e^{2x} = D + 2$$

が成立するので、微分方程式は  $e^{-2x} D e^{2x} u = 0$  となるが、両辺に左から  $e^{2x}$  をかけると  $D e^{2x} u = 0$  となる。両辺を積分すると  $e^{2x} u = C_1$  となるので

$$u = C_1 e^{-2x}$$

である。よって  $y$  についての微分方程式は

$$(D + 2)y = C_1 e^{-2x}$$

となる。

$$e^{-2x} D e^{2x} = D + 2$$

が成立するので、微分方程式は  $e^{-2x} D e^{2x} y = C_1 e^{-2x}$  となるが、両辺に左から  $e^{2x}$  をかけると  $D e^{2x} y = C_1$  となる。両辺を積分すると  $e^{2x} y = C_1 x + C_2$  となるので一般解は

$$y = C_1 x e^{-2x} + C_2 e^{-2x}$$

となる。

**演習問題 4.5** 次の微分方程式を実数値関数の範囲で解け。

(1)  $y'' + y = 0$

(2)  $y'' + \omega^2 y = 0 \quad (0 \neq \omega \in \mathbb{R})$

(3)  $y'' - y' + y = 0$

(4)  $y'' - 2y' + 2y = 0$

(1) 微分方程式を複素数値関数の範囲で解くと、一般解として

$$C_1 e^{ix} + C_2 e^{-ix}$$

が得られる (前問と同様なので詳細省略)。 $y_1 = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} = \cos x$  および  $y_2 = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} = \sin x$  は微分方程式の解であり、実数値関数である。

$$C_1 \cos x + C_2 \sin x$$

が一般解であることを示す。

$A = \{y \mid (D^2 + 1)y = 0, y \text{ は実数値関数}\}$ ,  $B = \{C_1 \cos x + C_2 \sin x \mid C_1, C_2 \in \mathbb{R}\}$  とする。 $y$  を  $B$  の任意の元とすると実数  $C_1, C_2$  が存在して  $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$  と書くことができる。 $y'' = -C_1 \cos x - C_2 \sin x$  なので

$$y'' + y = -C_1 \cos x - C_2 \sin x + C_1 \cos x + C_2 \sin x = 0$$

が成立する。よって  $y \in A$  であり、 $B \subseteq A$  となる。 $y \in A$  を任意の元とするとき、 $z = y(0) \cos x + y'(0) \sin x$  とおくと、

$$z(0) = y(0) \cos 0 + y'(0) \sin 0 = y(0)$$

であり、

$$z'(0) = -y(0) \sin 0 + y'(0) \cos 0 = y'(0)$$

となる。 $y, z$  はともに微分方程式  $(D^2 + 1)y = 0$  の解であり、 $y(0) = z(0)$ ,  $y'(0) = z'(0)$  となっている。よって微分方程式の解の一意性定理より  $y = z$  となる。よって  $y \in B$  であり、 $A \subseteq B$  が成立する。以上により  $A = B$  が示された。

(2) 微分方程式を複素数値関数の範囲で解くと、一般解として

$$C_1 e^{i\omega x} + C_2 e^{-i\omega x}$$

が得られる (前問と同様なので詳細省略)。 $y_1 = \frac{e^{i\omega x} + e^{-i\omega x}}{2} = \cos \omega x$  および  $y_2 = \frac{e^{i\omega x} - e^{-i\omega x}}{2i} = \sin \omega x$  は微分方程式の解であり、実数値関数である。

$$C_1 \cos \omega x + C_2 \sin \omega x$$

が一般解であることを示す。

$A = \{y \mid (D^2 + \omega^2)y = 0, y \text{ は実数値関数}\}$ ,  $B = \{C_1 \cos \omega x + C_2 \sin \omega x \mid C_1, C_2 \in \mathbb{R}\}$  とする。 $y$  を  $B$  の任意の元とすると実数  $C_1, C_2$  が存在して  $y = C_1 \cos \omega x + C_2 \sin \omega x$  と書くことができる。 $y'' = -C_1 \omega^2 \cos x - C_2 \omega^2 \sin x$  なので

$$y'' + \omega^2 y = -C_1 \omega^2 \cos x - C_2 \omega^2 \sin x + \omega^2 (C_1 \cos x + C_2 \sin x) = 0$$

が成立する。よって  $y \in A$  であり、 $B \subseteq A$  となる。 $y \in A$  を任意の元とするとき、 $z = y(0) \cos \omega x + \frac{y'(0)}{\omega} \sin \omega x$  とおくと、

$$z(0) = y(0) \cos 0 + \frac{y'(0)}{\omega} \sin 0 = y(0)$$

であり,

$$z'(0) = -\omega y(0) \sin 0 + \frac{y'(0)}{\omega} \omega \cos 0 = y'(0)$$

となる。 $y, z$  はともに微分方程式  $(D^2 + \omega^2)y = 0$  の解であり,  $y(0) = z(0)$ ,  $y'(0) = z'(0)$  となっている。よって微分方程式の解の一意性定理より  $y = z$  となる。よって  $y \in B$  であり,  $A \subseteq B$  が成立する。以上により  $A = B$  が示された。

(3) 微分方程式を複素数値関数の範囲で解くと, 一般解として

$$C_1 \exp\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}x\right) + C_2 \exp\left(\frac{1-i\sqrt{3}}{2}x\right)$$

が得られる (前問と同様なので詳細省略)。

$$y_1 = \frac{\exp\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}x\right) + \exp\left(\frac{1-i\sqrt{3}}{2}x\right)}{2} = \exp\left(\frac{1}{2}x\right) \cos \frac{\sqrt{3}}{2}x \quad \text{および}$$

$$y_2 = \frac{\exp\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}x\right) - \exp\left(\frac{1-i\sqrt{3}}{2}x\right)}{2i} = \exp\left(\frac{1}{2}x\right) \sin \frac{\sqrt{3}}{2}x$$

は微分方程式の解であり, 実数値関数である。

$$C_1 \exp\left(\frac{1}{2}x\right) \cos \frac{\sqrt{3}}{2}x + C_2 \exp\left(\frac{1}{2}x\right) \sin \frac{\sqrt{3}}{2}x$$

が一般解であることを示す。 $A = \{y \mid (D^2 - D + 1)y = 0, y \text{ は実数値関数}\}$ ,

$B = \left\{ C_1 \exp\left(\frac{1}{2}x\right) \cos \frac{\sqrt{3}}{2}x + C_2 \exp\left(\frac{1}{2}x\right) \sin \frac{\sqrt{3}}{2}x \mid C_1, C_2 \in \mathbb{R} \right\}$  とする。 $y$  を  $B$  の任意

の元とすると実数  $C_1, C_2$  が存在して  $y = C_1 \exp\left(\frac{1}{2}x\right) \cos \frac{\sqrt{3}}{2}x + C_2 \exp\left(\frac{1}{2}x\right) \sin \frac{\sqrt{3}}{2}x$  と書くことができる。

$$y' = C_1 \frac{1}{2} \exp\left(\frac{1}{2}x\right) \cos \frac{\sqrt{3}}{2}x - C_1 \frac{\sqrt{3}}{2} \exp\left(\frac{1}{2}x\right) \sin \frac{\sqrt{3}}{2}x$$

$$+ C_2 \frac{1}{2} \exp\left(\frac{1}{2}x\right) \sin \frac{\sqrt{3}}{2}x + C_2 \frac{\sqrt{3}}{2} \exp\left(\frac{1}{2}x\right) \cos \frac{\sqrt{3}}{2}x$$

$$y'' = -C_1 \frac{1}{2} \exp\left(\frac{1}{2}x\right) \cos \frac{\sqrt{3}}{2}x - C_1 \frac{\sqrt{3}}{2} \exp\left(\frac{1}{2}x\right) \sin \frac{\sqrt{3}}{2}x$$

$$- C_2 \frac{1}{2} \exp\left(\frac{1}{2}x\right) \sin \frac{\sqrt{3}}{2}x + C_2 \frac{\sqrt{3}}{2} \exp\left(\frac{1}{2}x\right) \cos \frac{\sqrt{3}}{2}x$$

なので

$$y'' - y' + y = 0$$

が成立する。よって  $y \in A$  であり,  $B \subseteq A$  となる。



$y \in A$  を任意の元とするとき,

$$z = y(0) \exp\left(\frac{1}{2}x\right) \cos \frac{\sqrt{3}}{2}x + \left(\frac{2}{\sqrt{3}}y'(0) - \frac{1}{\sqrt{3}}y(0)\right) \exp\left(\frac{1}{2}x\right) \sin \frac{\sqrt{3}}{2}x$$

とおくと,  $y, z$  はともに微分方程式  $(D^2 - D + 1)y = 0$  の解であり,  $y(0) = z(0)$ ,  $y'(0) = z'(0)$  となっている。よって微分方程式の解の一意性定理より  $y = z$  となる。よって  $y \in B$  であり,  $A \subseteq B$  が成立する。以上により  $A = B$  が示された。

(4) 微分方程式を複素数値関数の範囲で解くと, 一般解として

$$C_1 \exp((1+i)x) + C_2 \exp((1-i)x)$$

が得られる (前問と同様なので詳細省略)。

$$y_1 = \frac{\exp((1+i)x) + \exp((1-i)x)}{2} = e^x \cos x \quad \text{および}$$
$$y_2 = \frac{\exp((1+i)x) - \exp((1-i)x)}{2i} = e^x \sin x$$

は微分方程式の解であり, 実数値関数である。

$$C_1 e^x \cos x + C_2 e^x \sin x$$

が一般解であることを示す。  $A = \{y \mid (D^2 - 2D + 2)y = 0, y \text{ は実数値関数}\}$ ,  
 $B = \{C_1 e^x \cos x + C_2 e^x \sin x \mid C_1, C_2 \in \mathbb{R}\}$  とする。  $y$  を  $B$  の任意の元とすると実数  $C_1, C_2$  が存在して  $y = C_1 \exp\left(\frac{1}{2}x\right) \cos \frac{\sqrt{3}}{2}x + C_2 \exp\left(\frac{1}{2}x\right) \sin \frac{\sqrt{3}}{2}x$  と書くことができる。このとき

$$y'' - 2y' + 2y = 0$$

が成立する。よって  $y \in A$  であり,  $B \subseteq A$  となる。

$y \in A$  を任意の元とするとき,

$$z = y(0)e^x \cos x + (y'(0) - y(0))e^x \sin x$$

とおくと,  $y, z$  はともに微分方程式  $(D^2 - 2D + 2)y = 0$  の解であり,  $y(0) = z(0)$ ,  $y'(0) = z'(0)$  となっている。よって微分方程式の解の一意性定理より  $y = z$  となる。よって  $y \in B$  であり,  $A \subseteq B$  が成立する。以上により  $A = B$  が示された。

**演習問題 4.6** 次が成立することを示せ。

2次式  $\varphi(t) = t^2 + at + b$  に対し方程式  $\varphi(t) = 0$  は解  $\alpha, \beta$  を持つとする。微分方程式

$$(D^2 + aD + b)y = 0$$

を考える。この微分方程式の一般解は  $\alpha \neq \beta$  のとき

$$y = C_1 e^{\alpha x} + C_2 e^{\beta x}$$

であり,  $\alpha = \beta$  のとき

$$y = C_1 x e^{\alpha x} + C_2 e^{\alpha x}$$

である。

$\varphi(t) = 0$  の 2 解を  $\alpha, \beta$  とすると  $\varphi(t) = (t - \alpha)(t - \beta)$  が成立する。このとき

$$D^2 + aD + b = (D - \alpha)(D - \beta)$$

が成立する。 $u = (D - \beta)y$  とおくと  $u$  に関する微分方程式は

$$(D - \alpha)u = 0$$

となる。 $e^{\alpha x} D e^{-\alpha x} = D - \alpha$  より  $e^{\alpha x} D e^{-\alpha x} u = 0$  となるが、両辺に左から  $e^{-\alpha x}$  をかけると  $D e^{-\alpha x} u = 0$  となる。両辺を積分すると  $e^{-\alpha x} u = C_1$  となるので

$$u = C_1 e^{\alpha x}$$

となる。よって  $y$  についての微分方程式は  $(D - \beta)y = C_1 e^{\alpha x}$  となる。

$$e^{\beta x} D e^{-\beta x} = D - \beta$$

が成立するので微分方程式は  $e^{\beta x} D e^{-\beta x} y = C_1 e^{\alpha x}$  となるが、両辺に左から  $e^{-\beta x}$  をかけると

$$D e^{-\beta x} y = C_1 e^{(\alpha - \beta)x}$$

となる。

ここで場合分けを行う。 $\alpha \neq \beta$  のときは両辺を積分すると

$$e^{-\beta x} y = \frac{C_1}{\alpha - \beta} e^{(\alpha - \beta)x} + C_2$$

となるのでとなる。

$$y = \frac{C_1}{\alpha - \beta} e^{\alpha x} + C_2 e^{\beta x}$$

$\frac{C_1}{\alpha - \beta}$  をあらためて  $C_1$  と置き直すと一般解は

$$y = C_1 e^{\alpha x} + C_2 e^{\beta x}$$

となる。

$\alpha = \beta$  のときは  $e^{(\alpha - \beta)x} = 1$  なので両辺を積分すると

$$e^{-\alpha x} y = C_1 x + C_2$$

となるので一般解は

$$y = C_1 x e^{\alpha x} + C_2 e^{\alpha x}$$

である。

**演習問題 4.7** 次が成立することを示せ。

$\varphi(t) = t^2 + at + b = 0$  は実数解を持たないとする。 $\varphi(t) = 0$  の複素解を  $\lambda_1 \pm i\lambda_2$  とする。微分方程式

$$(D^2 + aD + b)y = 0$$

の実数値関数としての一般解は

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} \cos \lambda_2 x + C_2 e^{\lambda_1 x} \sin \lambda_2 x$$

である。ここで  $C_1, C_2$  は実数である任意定数。

$\varphi(t) = 0$  の 2 解を  $\alpha, \beta$  とすると  $\varphi(t) = (t - \alpha)(t - \beta)$  が成立する。ただしここで  $\alpha = \lambda_1 + i\lambda_2$ ,  $\beta = \lambda_1 - i\lambda_2$  とする。このとき

$$D^2 + aD + b = (D - \alpha)(D - \beta)$$

が成立する。 $u = (D - \beta)y$  とおくと  $u$  に関する微分方程式は

$$(D - \alpha)u = 0$$

となる。 $e^{\alpha x} D e^{-\alpha x} = D - \alpha$  より  $e^{\alpha x} D e^{-\alpha x} u = 0$  となるが、両辺に左から  $e^{-\alpha x}$  をかけると  $D e^{-\alpha x} u = 0$  となる。両辺を積分すると  $e^{-\alpha x} u = C_1$  となるので

$$u = C_1 e^{\alpha x}$$

となる。よって  $y$  についての微分方程式は  $(D - \beta)y = C_1 e^{\alpha x}$  となる。

$$e^{\beta x} D e^{-\beta x} = D - \beta$$

が成立するので微分方程式は  $e^{\beta x} D e^{-\beta x} y = C_1 e^{\alpha x}$  となるが、両辺に左から  $e^{-\beta x}$  をかけると

$$D e^{-\beta x} y = C_1 e^{(\alpha - \beta)x}$$

となる。両辺を積分すると

$$e^{-\beta x} y = \frac{C_1}{\alpha - \beta} e^{(\alpha - \beta)x} + C_2$$

となるのでとなる。

$$y = \frac{C_1}{\alpha - \beta} e^{\alpha x} + C_2 e^{\beta x}$$

$\frac{C_1}{\alpha - \beta}$  をあらためて  $C_1$  と置き直すと一般解は

$$y = C_1 e^{\alpha x} + C_2 e^{\beta x}$$

となる。

複素数値関数の解として

$$y_1 = e^{\alpha x} = e^{(\lambda_1 + i\lambda_2)x} = e^{\lambda_1 x} e^{i\lambda_2 x} = e^{\lambda_1 x} (\cos \lambda_2 x + i \sin \lambda_2 x)$$

$$y_2 = e^{\beta x} = e^{(\lambda_1 - i\lambda_2)x} = e^{\lambda_1 x} e^{-i\lambda_2 x} = e^{\lambda_1 x} (\cos \lambda_2 x - i \sin \lambda_2 x)$$

の 2 つがあるが、これから実数値関数  $z_1, z_2$  を

$$z_1 = \frac{y_1 + y_2}{2} = e^{\lambda_1 x} \cos \lambda_2 x$$

$$z_2 = \frac{y_1 - y_2}{2i} = e^{\lambda_1 x} \sin \lambda_2 x$$

を構成することができる。このとき

$$C_1 z_1 + C_2 z_2$$

が一般解であることを示す。

即ち  $A = \{y \mid (D^2 + aD + b)y = 0, y \text{ は実数値関数}\}$ ,  $B = \{C_1 z_1 + C_2 z_2 \mid C_1, C_2 \in \mathbb{R}\}$  とするとき  $A = B$  を示す。

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= t^2 + at + b = (t - \alpha)(t - \beta) = t^2 - (\alpha + \beta)t + \alpha\beta \\ &= t^2 - (\lambda_1 + i\lambda_2 + \lambda_1 - i\lambda_2)t + (\lambda_1 + i\lambda_2)(\lambda_1 - i\lambda_2) = t^2 - 2\lambda_1 t + (\lambda_1^2 + \lambda_2^2) \end{aligned}$$

より  $a = -2\lambda_1$ ,  $b = \lambda_1^2 + \lambda_2^2$  が成立している。 $y$  を  $B$  の任意の元とする。ある実数  $C_1, C_2$  が存在して  $y = C_1 z_1 + C_2 z_2$  とかかわれている。

$$\begin{aligned} y'' + ay' + y &= C_1 z_1'' + C_2 z_2'' + aC_1 z_1' + aC_2 z_2' + bC_1 z_1 + bC_2 z_2 \\ &= C_1 ((\lambda_1^2 - \lambda_2^2)e^{\lambda_1 x} \cos \lambda_2 x - 2\lambda_1 \lambda_2 e^{\lambda_1 x} \sin \lambda_2 x) + C_2 ((\lambda_1^2 - \lambda_2^2)e^{\lambda_1 x} \sin \lambda_2 x + 2\lambda_1 \lambda_2 e^{\lambda_1 x} \cos \lambda_2 x) \\ &\quad + aC_1 (\lambda_1 e^{\lambda_1 x} \cos \lambda_2 x - \lambda_2 e^{\lambda_1 x} \sin \lambda_2 x) + aC_2 (\lambda_1 e^{\lambda_1 x} \sin \lambda_2 x + \lambda_2 e^{\lambda_1 x} \cos \lambda_2 x) \\ &\quad + bC_1 e^{\lambda_1 x} \cos \lambda_2 x + bC_2 e^{\lambda_1 x} \sin \lambda_2 x \\ &= C_1 (\lambda_1^2 - \lambda_2^2 + a\lambda_1 + b)e^{\lambda_1 x} \cos \lambda_2 x + C_1 (-2\lambda_1 \lambda_2 - a\lambda_2)e^{\lambda_1 x} \sin \lambda_2 x \\ &\quad + C_2 (\lambda_1^2 - \lambda_2^2 + a\lambda_1 + b)e^{\lambda_1 x} \sin \lambda_2 x + C_2 (2\lambda_1 \lambda_2 + a\lambda_2)e^{\lambda_1 x} \cos \lambda_2 x = 0 \end{aligned}$$

なので  $y \in A$  が成立する。よって  $B \subseteq A$  である。

$y \in A$  を任意の元とする。 $C_1 = y(0)$ ,  $C_2 = \frac{y'(0) - y(0)\lambda_1}{\lambda_2}$ ,  $z = C_1 z_1 + C_2 z_2$  とおく。

$$z(0) = C_1 z_1(0) + C_2 z_2(0) = y(0) \cdot 1 + C_2 \cdot 0 = y(0)$$

であり,

$$\begin{aligned} z'(0) &= C_1 z_1'(0) + C_2 z_2'(0) \\ &= y(0)\lambda_1 + \frac{y'(0) - y(0)\lambda_1}{\lambda_2} \lambda_2 = y'(0) \end{aligned}$$

となる。 $y, z$  はともに微分方程式  $(D^2 + aD + b)y = 0$  の解であり,  $y(0) = z(0)$ ,  $y'(0) = z'(0)$  となっている。よって微分方程式の解の一意性定理より  $y = z$  となる。よって  $y \in B$  であり,  $A \subseteq B$  が成立する。以上により  $A = B$  が示された。

**演習問題 4.8** 次の微分方程式を解け。

$$(1) \frac{dy}{dx} - 3y = e^{2x}$$

$$(2) \frac{dy}{dx} + 2y = \sin x$$

$$(3) \frac{dy}{dx} + 3y = x^2 + x$$

$$(4) \frac{d^2 y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} - 3y = x + 4$$

$$(5) \frac{d^2 y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} - 3y = \sin x$$

$$(6) \frac{d^2 y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} - 3y = e^{2x}$$

(1) 与えられた微分方程式は演算子を用いて

$$(D - 3)y = e^{2x}$$

と書き直すことができる。

$$e^{3x}De^{-3x} = D - 3$$

が成立する。よって微分方程式は

$$e^{3x}De^{-3x}y = e^{2x}$$

となる。両辺に左から  $e^{-3x}$  をかけると

$$D(e^{-3x})y = e^{-x}$$

となる。両辺を  $x$  で積分すると

$$e^{-3x}y = -e^{-x} + C$$

となるので

$$y = -e^{2x} + Ce^{3x}$$

である。

(2) 与えられた微分方程式は演算子を用いて

$$(D + 2)y = \sin x$$

と書き直すことができる。

$$e^{-2x}De^{2x} = D + 2$$

が成立する。よって微分方程式は

$$e^{-2x}De^{2x}y = \sin x$$

となる。両辺に左から  $e^{-3x}$  をかけると

$$D(e^{2x})y = e^{2x} \sin x$$

となる。両辺を  $x$  で積分すると

$$e^{2x}y = \frac{2}{5}e^{2x} \sin x - \frac{1}{5}e^{2x} \cos x + C$$

となるので

$$y = \frac{2}{5} \sin x - \frac{1}{5} \cos x + Ce^{-2x}$$

である。

(3) 与えられた微分方程式は演算子を用いて

$$(D + 3)y = x^2 + x$$

と書き直すことができる。

$$e^{-3x}De^{3x} = D + 3$$

が成立する。よって微分方程式は

$$e^{-3x}De^{3x}y = x^2 + x$$

となる。両辺に左から  $e^{-3x}$  をかけると

$$D(e^{3x})y = e^{3x} (x^2 + x)$$

となる。両辺を  $x$  で積分すると

$$e^{3x}y = \frac{1}{3}e^{3x}x^2 - \frac{1}{9}e^{3x}x - \frac{1}{27}e^{3x} + C$$

となるので

$$y = \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{9}x - \frac{1}{27} + Ce^{-3x}$$

である。

(4) 与えられた微分方程式は演算子を用いて

$$(D^2 - 2D - 3)y = x + 4$$

と書き直すことができる。 $D^2 - 2D - 3 = (D+1)(D-3)$  なので微分方程式は  $(D+1)(D-3)y = x+4$  となる。 $u = (D-3)y$  とおくと  $u$  がみたす微分方程式は  $(D+1)u = x+4$  となる。

$$e^{-x}De^x = D + 1$$

が成立するので、微分方程式は  $e^{-x}De^xu = x+4$  となるが、両辺に左から  $e^x$  をかけると  $De^xu = (x+4)e^x$  となる。両辺を積分すると  $e^xu = xe^x + 3e^x + C_1$  となるので

$$u = x + 3 + C_1e^{-x}$$

である。よって  $y$  についての微分方程式は

$$(D-3)y = x + 3 + C_1e^{-x}$$

となる。

$$e^{3x}De^{-3x} = D - 3$$

が成立するので、微分方程式は  $e^{3x}De^{-3x}y = x + 3 + C_1e^{-x}$  となるが、両辺に左から  $e^{-3x}$  をかけると  $De^{-3x}y = xe^{-3x} + 3e^{-3x} + C_1e^{-4x}$  となる。両辺を積分すると

$$e^{-3x}y = -\frac{1}{3}xe^{-3x} - \frac{10}{9}e^{-3x} - \frac{C_1}{4}e^{-4x} + C_2$$

となるので  $y = -\frac{1}{3}x - \frac{10}{9} - \frac{C_1}{4}e^{-x} + C_2e^{3x}$  となる。 $-\frac{C_1}{4}$  をあらためて  $C_1$  と置き直すと一般解は

$$y = -\frac{1}{3}x - \frac{10}{9} + C_1e^{-x} + C_2e^{3x}$$

となる。

(5) 与えられた微分方程式は演算子を用いて

$$(D^2 - 2D - 3)y = \sin x$$

と書き直すことができる。 $D^2 - 2D - 3 = (D+1)(D-3)$  なので微分方程式は  $(D+1)(D-3)y = \sin x$  となる。 $u = (D-3)y$  とおくと  $u$  がみたす微分方程式は  $(D+1)u = \sin x$  となる。

$$e^{-x}De^x = D + 1$$

が成立するので、微分方程式は  $e^{-x}De^xu = \sin x$  となるが、両辺に左から  $e^x$  をかけると  $De^xu = e^x \sin x$  となる。両辺を積分すると  $e^xu = \frac{1}{2}e^x \sin x - \frac{1}{2}e^x \cos x + C_1$  となるので

$$u = \frac{1}{2} \sin x - \frac{1}{2} \cos x + C_1 e^{-x}$$

である。よって  $y$  についての微分方程式は

$$(D-3)y = \frac{1}{2} \sin x - \frac{1}{2} \cos x + C_1 e^{-x}$$

となる。

$$e^{3x}De^{-3x}y = D-3$$

が成立するので、微分方程式は  $e^{3x}De^{-3x}y = \frac{1}{2} \sin x - \frac{1}{2} \cos x + C_1 e^{-x}$  となるが、両辺に左から  $e^{-3x}$  をかけると  $De^{-3x}y = \frac{1}{2}e^{-3x} \sin x - \frac{1}{2}e^{-3x} \cos x + C_1 e^{-4x}$  となる。両辺を積分すると

$$e^{-3x}y = \frac{1}{10}e^{-3x} \cos x - \frac{1}{5}e^{-3x} \sin x - \frac{C_1}{4}e^{-4x} + C_2$$

となるので  $y = \frac{1}{10} \cos x - \frac{1}{5} \sin x - \frac{C_1}{4}e^{-x} + C_2 e^{3x}$  となる。 $-\frac{C_1}{4}$  をあらためて  $C_1$  と置き直すと一般解は

$$y = \frac{1}{10} \cos x - \frac{1}{5} \sin x + C_1 e^{-x} + C_2 e^{3x}$$

となる。

(6) 与えられた微分方程式は演算子を用いて

$$(D^2 - 2D - 3)y = e^{2x}$$

と書き直すことができる。 $D^2 - 2D - 3 = (D+1)(D-3)$  なので微分方程式は  $(D+1)(D-3)y = e^{2x}$  となる。 $u = (D-3)y$  とおくと  $u$  がみたす微分方程式は  $(D+1)u = e^{2x}$  となる。

$$e^{-x}De^xu = D+1$$

が成立するので、微分方程式は  $e^{-x}De^xu = e^{2x}$  となるが、両辺に左から  $e^x$  をかけると  $De^xu = e^{3x}$  となる。両辺を積分すると  $e^xu = \frac{1}{3}e^{3x} + C_1$  となるので

$$u = \frac{1}{3}e^{2x} + C_1 e^{-x}$$

である。よって  $y$  についての微分方程式は

$$(D-3)y = \frac{1}{3}e^{2x} + C_1 e^{-x}$$

となる。

$$e^{3x}De^{-3x}y = D-3$$

が成立するので、微分方程式は  $e^{3x}De^{-3x}y = \frac{1}{3}e^{2x} + C_1 e^{-x}$  となるが、両辺に左から  $e^{-3x}$  をかけると  $De^{-3x}y = \frac{1}{3}e^{-x} + C_1 e^{-4x}$  となる。両辺を積分すると

$$e^{-3x}y = -\frac{1}{3}e^{-x} - \frac{C_1}{4}e^{-4x} + C_2$$

となるので  $y = -\frac{1}{3}e^{2x} - \frac{C_1}{4}e^{-x} + C_2e^{3x}$  となる。 $-\frac{C_1}{4}$  をあらためて  $C_1$  と置き直すと一般解は

$$y = -\frac{1}{3}e^{2x} + C_1e^{-x} + C_2e^{3x}$$

となる。