解析学 I 要綱 #5

2009–11–6　河野

1.7　曲線の概形

f を微分可能関数とする。$f'(c) = 0$ となる点 c を f の **臨界点** という。臨界点 c に対して，「$f''(c) \neq 0$ ならば c は極大点か極小点である」ということを「解析学 1 」で示す。従って，この命題の対偶をとると，

「臨界点が極大か極小ではないなら $f''(c) = 0$ である。」

ということがわかる。

(注意： グラフの凹凸が変化する点を変曲点という。$f''(c) = 0$ であって $f'''(c) \neq 0$ ならば，臨界点であってもなくても，それは変曲点になる。)

臨界点を求め，それらで挟まれる区間における導関数の値の正負を調べることにより，関数のグラフの概形を描くことができる。導関数の値や関数値の増減を一覧表にしたものを，その関数の **増減表** という。

x		a		b		c		d	
$f'(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	$f(a)$	$\searrow$	$f(b)$	$\nearrow$	$f(c)$	$\searrow$	$f(d)$	$\nearrow$

例 1.26 $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$ のグラフの概形を描く。

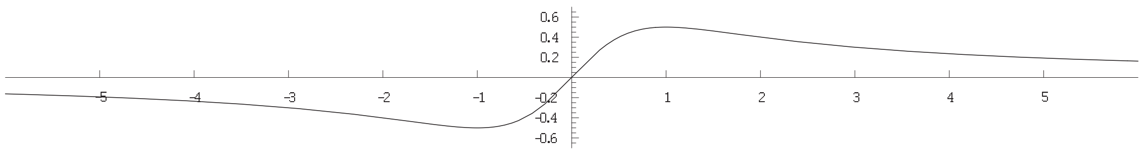
$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{x'(x^2+1) - x(x^2+1)'}{(x^2+1)^2} \\ &= \frac{(x^2+1) - 2x^2}{(x^2+1)^2} \\ &= \frac{-(x-1)(x+1)}{(x^2+1)^2} \end{aligned}$$

であるから，臨界点は $x = \pm 1$ である。$f(-1) = -\dfrac{1}{2}$, $f(1) = \dfrac{1}{2}$ より，増減表を作ると，

x		-1		1	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	$-\frac{1}{2}$	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$

となり，-1 は極小点，1 は極大点であることがわかる。

$\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ に注意すると，グラフの概形は次のようになることがわかる。



演習問題 1.9　以下の関数のグラフの概形を描け。

(1) $f(x) = 2x^2 - x^4$　(2) $f(x) = xe^{-x}$　(3) $f(x) = x^2 \log x$

(4) $f(x) = 3\sin x + \sin 3x$　(5) $f(x) = x - \sqrt{1+x}$　(6) $f(x) = \left(1 - \dfrac{1}{x}\right)^{\frac{2}{3}}$

(7) $f(x) = x + 2\cos x$　(8) $f(x) = \sin x(1 + \cos x)$　(9) $f(x) = x^{-x^2}$

関数のグラフの凹凸を調べることで，もう少し正確に概形を描くことができる。関数 $y = f(x)$ がある区間 $[\,a, b\,]$ で**下に凸**であるとは次で定義される；任意の $x_1, x_2 \in [\,a, b\,]$ に対し，$(x_1, f(x_1))$ と $(x_2, f(x_2))$ を結ぶ線分の下に関数 $y = f(x)$ $(x_1 < x < x_2)$ のグラフがある。式で書くと $x_1 < x < x_2$ に対し

$$f(x) < \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1) + f(x_1)$$

が成立している。関数 $y = f(x)$ がある区間 $[\,a, b\,]$ で**上に凸**であるとは次で定義される；任意の $x_1, x_2 \in [\,a, b\,]$ に対し，$(x_1, f(x_1))$ と $(x_2, f(x_2))$ を結ぶ線分の上に関数 $y = f(x)$ $(x_1 < x < x_2)$ のグラフがある。式で書くと $x_1 < x < x_2$ に対し

$$f(x) > \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1) + f(x_1)$$

が成立している。

次の命題を用いてグラフの凹凸を判断することができる。

命題 1.27 関数 $y = f(x)$ が $(\,a, b\,)$ において $f''(x) > 0$ とすると，この区間で関数のグラフは下に凸である。$(\,a, b\,)$ において $f''(x) < 0$ とすると，この区間で関数のグラフは上に凸である。

演習問題 *1.10　$x_1, x_2 \in [\,a, b\,]$ に対し $F(x) = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1) + f(x_1) - f(x)$ とおき，$F(x)$ の正負を調べることにより命題 1.27 を証明せよ。

演習問題 1.11　次の関数のグラフの凹凸を調べ概形を描け。

(1) $y = (x-5)^4(x+1)^3$　(2) $y = \dfrac{x^2+1}{x}$

(3) $y = e^{-x^2}$　(4) $y = x \log x$

パラメータ表示された曲線の概形

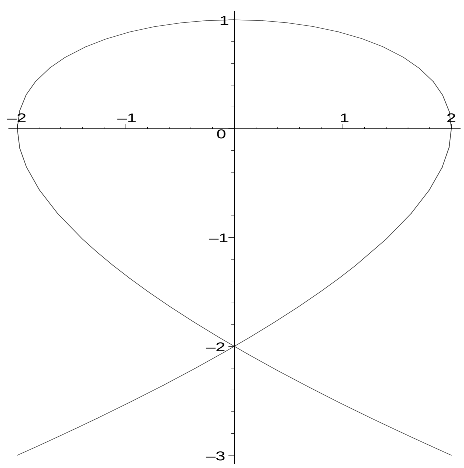
パラメータ表示された曲線の概形を書くというのも大切である。$(x(t), y(t))$ とパラメータ表示されている場合，関数 $x(t), y(t)$ の概形が分かれば，それを組み合わせることにより書くことができる。

$x = x(t) = 3t - t^3, y = y(t) = 1 - t^2$ でパラメータ表示された曲線の概形を書こう。

$x' = 3 - 3t^3$ より $t = \pm 1$ において $x' = 0$ となる。$y' = -2t$ より $t = 0$ において $y' = 0$ となる。よって増減表は以下の様になる。

t		-1		0		1	
x'	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$
x	$\leftarrow$		$\rightarrow$	$\rightarrow$	$\rightarrow$		$\leftarrow$
y'	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
y	$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$		$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$
曲線	$\nwarrow$	$\uparrow$	$\nearrow$	$\rightarrow$	$\searrow$	$\downarrow$	$\swarrow$

$x = 0$ となるのは $t = 0, \pm\sqrt{3}$, $y = 0$ となるのは $t = \pm 1$ である。即ちこの曲線は x 軸と $(2,0), (-2,0)$ で交わり，y 軸とは $(0,1), (0,-2)$ で交わる。このことに注意して概形を描くと次の様になる。



演習問題 1.12 次のようにパラメータ表示された曲線の概形を書け。
(1) $x = x(t) = t^4 - t^2, y = y(t) = t^3 - t$
(2) $x = x(t) = t - t^3, y = y(t) = 1 - t^4$