

演習問題 1.1 次の関数 $f(x)$ は連続かどうか調べよ。

(1) $y = f(x) = x^2 + ax + b$

(2) $y = f(x) = \frac{1}{x}$

(1) $y = x^n$ に関しては $\lim_{x \rightarrow \alpha} x^n = \alpha^n$ が成立する。また和の極限については極限の和になるので、任意の実数 α に対し

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) &= \lim_{x \rightarrow \alpha} (x^2 + ax + b) \\ &= \lim_{x \rightarrow \alpha} x^2 + \lim_{x \rightarrow \alpha} (ax) + \lim_{x \rightarrow \alpha} b \\ &= \lim_{x \rightarrow \alpha} x^2 + a \lim_{x \rightarrow \alpha} x + \lim_{x \rightarrow \alpha} b \\ &= \alpha^2 + a\alpha + b = f(\alpha) \end{aligned}$$

となる。よって $f(x)$ は連続関数である。

(2) 講義で述べたように定義域をどこで考えるかが重要である。問題文では意図的に定義域を明確に書かなかった。定義域をどう考えるかで変わって来るからである。ここでは定義できる最大の領域として、定義域を $D = \mathbb{R} - \{0\}$ とする。任意の $\alpha \in D$ に対し

$$\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = \lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{1}{x} = \frac{1}{\alpha} = f(\alpha)$$

ので $f(x)$ は連続関数である。

演習問題 1.2 近似の一番よい3次式を求めよ。また近似の一番よい4次式を求めよ。ここで近似の一番よい3次式とは $d(h) = f(x+h) - (Ah^3 + Bh^2 + Ch + D)$ に対し $\varepsilon(h) = \frac{d(h)}{h^3}$ とおくと $\lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0$ が成立するものをいう。近似の一番よい4次式とは $d(h) = f(x+h) - (Ah^4 + Bh^3 + Ch^2 + Dh + E)$ に対し $\varepsilon(h) = \frac{d(h)}{h^4}$ とおくと $\lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0$ が成立するものをいう。

最初に3次式で近似する。

$$d(h) = f(x+h) - (A + Bh + Ch^2 + Dh^3)$$

$$\varepsilon(h) = \frac{d(h)}{h^3}$$

とおくとき $\lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0$ が成立している。 $d(h) = \varepsilon(h)h^3$ なので $\lim_{h \rightarrow 0} d(h) = 0$ が成立している。よって

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{h \rightarrow 0} d(h) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(f(x+h) - (A + Bh + Ch^2 + Dh^3) \right) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} f(x+h) - \lim_{h \rightarrow 0} (A + Bh + Ch^2 + Dh^3) = f(x) - A \end{aligned}$$

となるので $A = f(x)$ である。

$$\begin{aligned}\lim_{h \rightarrow 0} \frac{d(h)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h)h^2 = 0 \text{ なので} \\ 0 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{d(h)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - (f(x) + Bh + Ch^2 + Dh^3)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - \lim_{h \rightarrow 0} (B + Ch + Dh^2) \\ &= f'(x) - B\end{aligned}$$

となるので $B = f'(x)$ である。

$$\begin{aligned}\lim_{h \rightarrow 0} \frac{d(h)}{h^2} &= \lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h)h = 0 \text{ なので} \\ 0 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{d(h)}{h^2} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - (f(x) + f'(x)h + Ch^2 + Dh^3)}{h^2} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(x+h) - f'(x) - 2Ch - 3Dh^2}{2h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f''(x+h) - 2C - 6Dh}{2} \\ &= \frac{f''(x) - 2C}{2}\end{aligned}$$

となるので $C = \frac{f''(x)}{2}$ である。ただし変形の途中でロピタルの定理を用いた。

$$\begin{aligned}\lim_{h \rightarrow 0} \frac{d(h)}{h^3} &= \lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0 \text{ なので} \\ 0 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{d(h)}{h^3} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - (f(x) + f'(x)h + \frac{f''(x)}{2}h^2 + Dh^3)}{h^3} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(x+h) - f'(x) - f''(x)h - 3Dh^2}{3h^2} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f''(x+h) - f''(x) - 6Dh}{6h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'''(x+h) - 6D}{6} \\ &= \frac{f'''(x) - 6D}{6}\end{aligned}$$

となるので $D = \frac{f'''(x)}{6}$ である。ただし変形の途中でロピタルの定理を用いた。

以上により最も近似のよい 3 次式は

$$f(x) + f'(x)h + \frac{f''(x)}{2}h^2 + \frac{f'''(x)}{6}h^3$$

である。

次に 4 次式での近似を考える。

$$d(h) = f(x+h) - (A + Bh + Ch^2 + Dh^3 + Eh^4)$$
$$\varepsilon(h) = \frac{d(h)}{h^4}$$

とおくとき $\lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0$ が成立している。 $d(h) = \varepsilon(h)h^4$ なので $\lim_{h \rightarrow 0} d(h) = 0$ が成立している。
よって

$$0 = \lim_{h \rightarrow 0} d(h)$$
$$= \lim_{h \rightarrow 0} \left(f(x+h) - (A + Bh + Ch^2 + Dh^3 + Eh^4) \right)$$
$$= \lim_{h \rightarrow 0} f(x+h) - \lim_{h \rightarrow 0} (A + Bh + Ch^2 + Dh^3 + Eh^4) = f(x) - A$$

となるので $A = f(x)$ である。

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{d(h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h)h^3 = 0 \text{ なので}$$

$$0 = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{d(h)}{h}$$
$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - (f(x) + Bh + Ch^2 + Dh^3 + Eh^4)}{h}$$
$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - \lim_{h \rightarrow 0} (B + Ch + Dh^2 + Eh^3)$$
$$= f'(x) - B$$

となるので $B = f'(x)$ である。

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{d(h)}{h^2} = \lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h)h^2 = 0 \text{ なので}$$

$$0 = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{d(h)}{h^2}$$
$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - (f(x) + f'(x)h + Ch^2 + Dh^3 + Eh^4)}{h^2}$$
$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(x+h) - f'(x) - 2Ch - 3Dh^2 - 4Eh^3}{2h}$$
$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f''(x+h) - 2C - 6Dh - 12Eh^2}{2}$$
$$= \frac{f''(x) - 2C}{2}$$

となるので $C = \frac{f''(x)}{2}$ である。

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{d(h)}{h^3} = \lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h)h = 0 \text{ なるので}$$

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{d(h)}{h^3} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - (f(x) + f'(x)h + \frac{f''(x)}{2}h^2 + Dh^3 + Eh^4)}{h^3} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(x+h) - f'(x) - f''(x)h - 3Dh^2 - 4Eh^3}{3h^2} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f''(x+h) - f''(x) - 6Dh - 12Eh^2}{6h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'''(x+h) - 6D - 24Eh}{6} \\ &= \frac{f'''(x) - 6D}{6} \end{aligned}$$

となるので $D = \frac{f'''(x)}{6}$ である。ただし変形の途中でロピタルの定理を用いた。

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{d(h)}{h^4} = \lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0 \text{ なるので}$$

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{d(h)}{h^4} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - (f(x) + f'(x)h + \frac{f''(x)}{2}h^2 + \frac{f'''(x)}{6}h^3 + Eh^4)}{h^4} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(x+h) - f'(x) - f''(x)h - \frac{f'''(x)}{2}h^2 - 4Eh^3}{4h^3} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f''(x+h) - f''(x) - f'''(x)h - 12Eh^2}{12h^2} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'''(x+h) - f'''(x) - 24Eh}{24h} \\ &= \frac{f'''(x) - 24E}{24} \\ &= \frac{f'''(x) - 24E}{24} \end{aligned}$$

となるので $E = \frac{f'''(x)}{24}$ である。ただし変形の途中でロピタルの定理を用いた。

以上により最も近似のよい 4 次式は

$$f(x) + f'(x)h + \frac{f''(x)}{2}h^2 + \frac{f'''(x)}{6}h^3 + \frac{f''''(x)}{24}h^4$$

である。