

演習問題 1.3 実際に (1) を用いて (2) を証明せよ。

$F(x) = f(x) - g(x)$ とおくと

$$F'(x) = f'(x) - g'(x) = 0$$

である。(1) より $F(x)$ は定数関数となるので、ある定数 C が存在して、 $F(x) = C$ となる。このとき $f(x) - g(x) = C$ なので $f(x) = g(x) + C$ となっている。

演習問題 1.4 (1) を証明せよ。

$x_1 < x_2$ を満たす任意の x_1, x_2 に対し平均値の定理を適用するとある c ($x_1 < c < x_2$) が存在して

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1)$$

と書ける。このとき $f'(c) > 0, x_2 - x_1 > 0$ より $f(x_2) - f(x_1) > 0$ 即ち $f(x_1) < f(x_2)$ となる。よって f は単調増加である。

演習問題 1.5 (1) を証明せよ。

$x_1 < x_2$ を満たす任意の x_1, x_2 に対し平均値の定理を適用するとある c ($x_1 < c < x_2$) が存在して

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1)$$

と書ける。このとき $f'(c) \geq 0, x_2 - x_1 > 0$ より $f(x_2) - f(x_1) \geq 0$ 即ち $f(x_1) \leq f(x_2)$ となる。よって f は単調非減少である。

演習問題 *1.6 定理 1.18 を用いてロピタルの定理を証明せよ。ロピタルの定理とは以下の内容の定理である。

f, g は a の周りで微分可能とする。 $f(a) = g(a) = 0$ あるいは、 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty$ かつ $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \pm\infty$ となるとき、 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ が存在すれば $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ も存在して、両者の値は一致する。ここで a は $\pm\infty$ でもよい。

最初に $f(a) = g(a) = 0$ の場合を証明する。 $\lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ および $\lim_{x \rightarrow a-0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a-0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ を証明すれば $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ が証明される。
 $x > a$ とする $f(a) = g(a) = 0$ なので

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)}$$

が成立している。このとき定理 1.18 より $a < c < x$ となる c で

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)}$$

となるものが存在する。 $x \rightarrow a+0$ とすると $c \rightarrow a+0$ となるので

$$\lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f'(c)}{g'(c)} = \lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

が成立する。 $x < a$ の場合も同様なので省略する。

次に $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty$ かつ $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \pm\infty$ の場合を考える。 $F(x) = \frac{1}{f(x)}$ ($x \neq a$), $F(a) = 0$,
 $G(x) = \frac{1}{g(x)}$ ($x \neq a$), $G(a) = 0$, とおくと F および G は $x = a$ で連続である。 F, G に今証明
したロピタルの定理の $f(a) = g(a) = 0$ の場合を適用すると

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{F'(x)}{G'(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{F(x)}{G(x)}$$

が成立する。ここで $f(x)F(x) = 1$ より $f'(x)F(x) + f(x)F'(x) = 0$ 即ち $F'(x) = -\frac{f'(x)F(x)}{f(x)}$

が成立する。同様に $G'(x) = -\frac{g'(x)G(x)}{g(x)}$ が成立する。上式に代入すると

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \frac{g(x)}{f(x)} \frac{F(x)}{G(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{F(x)}{G(x)}$$

が成立する。これを整理する

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$$

が得られる。ただし途中 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{F(x)}{G(x)}$ の収束を仮定した。

演習問題 1.7 次の関数の $x = 0$ におけるテーラー級数を求めよ (テーラー展開可能であることは仮定してよい)。

(1) $f(x) = \log(1+x)$ (2) $f(x) = \frac{1}{1-x}$

(3) $f(x) = \sqrt{1+x}$ (4) $f(x) = \frac{1}{1+x}$

(5) $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$

(1) $f(x) = \log(1+x)$ に対しては, $f'(x) = \frac{1}{1+x}$, $f''(x) = \frac{-1}{(1+x)^2}$, $f'''(x) = \frac{2}{(1+x)^3}$, と

なる。 n 次導関数は $f^{(n)}(x) = (-1)^{n+1} \frac{(n-1)!}{(1+x)^n}$ と予想される。これを数学的帰納法で証明する。

ここで、数学的帰納法について説明しておく (理解している人はとばして下さい)。数学的帰納法とは、自然数 n に関する命題 $P(n)$ があって、命題

$$\forall n \in \mathbb{N} P(n)$$

を証明するとき用いられる 1 つの有力な方法である。即ち

(a) $P(1)$ は正しい

(b) 自然数 k に対し $P(k)$ が正しいければ $P(k+1)$ が正しい

の2つを証明することで「 $\forall n \in \mathbb{N} P(n)$ 」を証明する論法である。数学的帰納法を適用するためには、証明すべき命題が予め予想されている必要がある。通常は $n = 1, 2, 3, \dots$ と調べて、一般の n の場合を予想して、それを証明する。予想が正しくない場合は「証明」の途中で辻褃が合わなくなるので、予想が間違っていることに気がつく。

(a) $n = 1$ のとき：

$$f^{(1)}(x) = f'(x) = \frac{1}{1+x} = (-1)^{1+1} \frac{(1-1)!}{(1+x)^1}$$

なので $n = 1$ のとき予想は正しい。

(b) $n = k$ のとき成立を仮定する；即ち $f^{(k)}(x) = (-1)^{k+1} \frac{(k-1)!}{(1+x)^k}$ の成立を仮定する。 $f^{(k)}(x)$ を微分すると

$$\begin{aligned} f^{(k+1)}(x) &= \left(f^{(k)}(x) \right)' = \left((-1)^{k+1} \frac{(k-1)!}{(1+x)^k} \right)' \\ &= (-1)^{k+1} (k-1)! \frac{-k}{(1+x)^{k+1}} \\ &= (-1)^{(k+1)+1} \frac{k!}{(1+x)^{k+1}} \\ &= (-1)^{(k+1)+1} \frac{((k+1)-1)!}{(1+x)^{k+1}} \end{aligned}$$

が得られるので、 $k+1$ のときも成立している。よって任意の自然数 n に対し

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n+1} \frac{(n-1)!}{(1+x)^n}$$

が成立する。

$$f^{(k)}(0) = (-1)^{k+1} \frac{(k-1)!}{(1+0)^k} = (-1)^{k+1} (k-1)!, \text{ および } f(0) = \log(1+0) = \log 1 = 0 \text{ なので}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} f^{(k)}(0) x^k \\ &= f(0) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} (-1)^{k+1} (k-1)! x^k \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{k} x^k \end{aligned}$$

となる。 \sum を用いず

$$f(x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \dots + (-1)^{k+1} \frac{1}{k}x^k + \dots$$

という書き方でもよい。

数学的帰納法の形式だけを書いて実際は何も証明していない、間違っただけの証明をする学生がいる。この問題の数学的帰納法の部分の「証明」を次に書く。間違いを見つけれない人は、理解している友達か私に質問して下さい。

n 次導関数は $f^{(n)}(x) = (-1)^{n+1} \frac{(n-1)!}{(1+x)^n}$ と予想される。これを数学的帰納法で証明する。

(a) $n = 1$ のとき :

$$f^{(1)}(x) = f'(x) = \frac{1}{1+x} = (-1)^{1+1} \frac{(1-1)!}{(1+x)^1}$$

なので $n = 1$ のとき予想は正しい。

(b) $n = k$ のとき成立を仮定する ; 即ち $f^{(k)}(x) = (-1)^{k+1} \frac{(k-1)!}{(1+x)^k}$ の成立を仮定する。 n に $k+1$ を代入すると

$$f^{(k+1)}(x) = (-1)^{(k+1)+1} \frac{((k+1)-1)!}{(1+x)^{k+1}}$$

が得られるので、 $k+1$ のときも成立している。よって任意の自然数 n に対し

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n+1} \frac{(n-1)!}{(1+x)^n}$$

が成立する。

(2) $f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$, $f''(x) = \frac{2}{(1-x)^3}$, $f'''(x) = \frac{6}{(1-x)^4}$ となる。 n 次導関数は $f^{(n)}(x) = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}}$ と予想される。

(a) $n = 1$ のとき :

$$f^{(1)}(x) = \frac{1}{(1-x)^2} = \frac{1!}{(1-x)^{1+1}}$$

なので $n = 1$ のとき予想は正しい。

(b) $n = k$ のとき成立を仮定する ; 即ち $f^{(k)}(x) = \frac{k!}{(1-x)^{k+1}}$ の成立を仮定する。 $f^{(k)}(x)$ を微分すると,

$$\begin{aligned} f^{(k+1)}(x) &= \left(f^{(k)}(x) \right)' = \left(\frac{k!}{(1-x)^{k+1}} \right)' \\ &= k! \frac{-(k+1)(-1)}{(1-x)^{k+2}} \\ &= \frac{(k+1)!}{(1-x)^{k+2}} \end{aligned}$$

が得られるので、 $k+1$ のときも成立している。よって任意の自然数 n に対し

$$f^{(n)}(x) = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}}$$

が成立する。

0 以上の整数 k に対し $f^{(k)}(0) = \frac{k!}{(1-0)^{k+1}} = k!$, が成立するので

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} f^{(k)}(0) x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} k! x^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} x^k \end{aligned}$$

となる。

$$f(x) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^k + \cdots$$

という書き方でもよい。

$$(3) \quad f'(x) = \frac{1}{2}(1+x)^{\frac{1}{2}-1}, \quad f''(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - 1 \right) (1+x)^{\frac{1}{2}-2},$$

$f'''(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - 1 \right) \left(\frac{1}{2} - 2 \right) (1+x)^{\frac{1}{2}-3}$, となる。 n 次導関数は

$$f^{(n)}(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - 1 \right) \left(\frac{1}{2} - 2 \right) \cdots \left(\frac{1}{2} - (n-1) \right) (1+x)^{\frac{1}{2}-n}$$

と予想される。これを証明する前に $n(n-2)(n-4)\cdots$ の積の表し方を見ておく。最初に n が偶数の場合を考える；即ち n が $2n$ という形をしている場合を考える。

$$\begin{aligned} 2n \cdot (2n-2) \cdots 4 \cdot 2 &= 2 \cdot n \times 2 \cdot (n-1) \times \cdots \times 2 \cdot 2 \times 2 \cdot 1 \\ &= 2 \cdot 2 \cdots 2 \times n(n-1) \cdots 2 \cdot 1 \\ &= 2^n n! \end{aligned}$$

と表すことができる。奇数の場合は

$$\begin{aligned} 2n+1 \cdot 2n-1 \cdots 3 \cdot 1 &= \frac{2n+1 \cdot 2n-1 \cdots 3 \cdot 1 \times 2n \cdot (2n-2) \cdots 4 \cdot 2}{2n \cdot (2n-2) \cdots 4 \cdot 2} \\ &= \frac{(2n+1)!}{2^n n!} \end{aligned}$$

上の表記を用いると

$$\begin{aligned} f^{(n)}(x) &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - 1 \right) \left(\frac{1}{2} - 2 \right) \cdots \left(\frac{1}{2} - (n-1) \right) (1+x)^{\frac{1}{2}-n} \\ &= \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2} \right) \left(-\frac{3}{2} \right) \cdots \left(-\frac{2n-3}{2} \right) (1+x)^{\frac{1}{2}-n} \\ &= (-1)^{n-1} \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-3)}{2^n} (1+x)^{\frac{1}{2}-n} \\ &= (-1)^{n-1} \frac{1}{2^n} \frac{(2n-3)!}{2^{n-2}(n-2)!} (1+x)^{\frac{1}{2}-n} \end{aligned}$$

と予想される。ただしこの式は $n \geq 2$ 以上で意味を持つ。よって数学的帰納法は $n = 2$ を出発点とする。このときは 2 以上の自然数に対し命題が成立するという結果が得られるので、 $n = 0, 1$ は

別に考える必要がある。

(a) $n = 2$ のとき :

$$f^{(2)}(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - 1 \right) (1-x)^{\frac{1}{2}-2} = (-1)^{2-1} \frac{1}{2^2} \frac{(2 \cdot 2 - 3)!}{2^{2-2}(2-2)!} (1-x)^{\frac{1}{2}-2}$$

なので $n = 2$ のとき予想は正しい。

(b) $n = k$ のとき成立を仮定する ; 即ち $f^{(k)}(x) = (-1)^{k-1} \frac{1}{2^k} \frac{(2k-3)!}{2^{k-2}(k-2)!} (1+x)^{\frac{1}{2}-k}$ の成立を仮定する。 $f^{(k)}(x)$ を微分すると,

$$\begin{aligned} f^{(k+1)}(x) &= \left(f^{(k)}(x) \right)' \\ &= \left((-1)^{k-1} \frac{1}{2^k} \frac{(2k-3)!}{2^{k-2}(k-2)!} (1+x)^{\frac{1}{2}-k} \right)' \\ &= (-1)^{k-1} \frac{1}{2^k} \frac{(2k-3)!}{2^{k-2}(k-2)!} \left(\frac{1}{2} - k \right) (1+x)^{\frac{1}{2}-(k+1)} \\ &= (-1)^{k-1} \frac{1}{2^k} \frac{(2k-3)!}{2^{k-2}(k-2)!} \left(-\frac{2k-1}{2} \right) (1+x)^{\frac{1}{2}-k+1} \\ &= (-1)^k \frac{1}{2^{k+1}} \frac{(2k-3)!}{2^{k-2}(k-2)!} (2k-1)(1+x)^{\frac{1}{2}-k+1} \\ &= (-1)^k \frac{1}{2^{k+1}} \frac{(2k-3)!}{2^{k-2}(k-2)!} \frac{(2k-1)(2k-2)}{2k-2} (1+x)^{\frac{1}{2}-k+1} \\ &= (-1)^k \frac{1}{2^{k+1}} \frac{(2k-1)!}{2^{k-1}(k-1)!} (1+x)^{\frac{1}{2}-k+1} \\ &= (-1)^{k+1-1} \frac{1}{2^{k+1}} \frac{(2(k+1)-3)!}{2^{(k+1)-2}((k+1)-2)!} (1+x)^{\frac{1}{2}-k+1} \end{aligned}$$

が得られるので, $k+1$ のときも成立している。よって 2 以上の自然数 n に対し

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1} \frac{1}{2^n} \frac{(2n-3)!}{2^{n-2}(n-2)!} (1+x)^{\frac{1}{2}-n}$$

が成立する。

$$f^{(k)}(0) = (-1)^{k-1} \frac{(2k-3)!}{2^{2k-2}(k-2)!} \quad (n \geq 2), \quad f(0) = 1, \quad f'(0) = \frac{1}{2} \quad \text{なので}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} f^{(k)}(0) x^k \\ &= f(0) + f'(0)x + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k!} f^{(k)}(0) x^k \\ &= 1 + \frac{1}{2}x + \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{(2k-3)!}{2^{2k-2}(k-2)! k!} x^k \end{aligned}$$

となる。 $(2n)!! = 2n(n-2)(n-4) \cdots 4 \cdot 2$, $(2n+1)!! = (2n+1)(2n-1)(2n-3) \cdots 3 \cdot 1$ という記号を用いて表示することも考えられるが, 講義で紹介していないので採用しなかった。

(4) $f'(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}$, $f''(x) = \frac{2}{(1+x)^3}$, $f'''(x) = -\frac{6}{(1+x)^4}$ となる。 n 次導関数は $f^{(n)}(x) = (-1)^n \frac{n!}{(1+x)^{n+1}}$ と予想される。

(a) $n = 1$ のとき :

$$f^{(1)}(x) = -\frac{1}{(1+x)^2} = (-1)^1 \frac{1!}{(1+x)^{1+1}}$$

なので $n = 1$ のとき予想は正しい。

(b) $n = k$ のとき成立を仮定する ; 即ち $f^{(k)}(x) = (-1)^k \frac{k!}{(1+x)^{k+1}}$ の成立を仮定する。 $f^{(k)}(x)$ を微分すると,

$$\begin{aligned} f^{(k+1)}(x) &= \left(f^{(k)}(x) \right)' = \left((-1)^k \frac{k!}{(1+x)^{k+1}} \right)' \\ &= (-1)^k k! \frac{-(k+1)}{(1+x)^{k+2}} \\ &= (-1)^{k+1} \frac{(k+1)!}{(1+x)^{k+2}} \end{aligned}$$

が得られるので, $k+1$ のときも成立している。よって任意の自然数 n に対し

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n \frac{n!}{(1+x)^{n+1}}$$

が成立する。

0 以上の整数 k に対し $f^{(k)}(0) = (-1)^k \frac{k!}{(1-0)^{k+1}} = (-1)^k k!$, が成立するので

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} f^{(k)}(0) x^k = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k!} k! x^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^k \end{aligned}$$

となる。

(5) n 次導関数を求めなくても, $f^{(n)}(0)$ が求まればよいことに注目する。

$$f(x)(1+x^2) = 1$$

と変形して両辺を n 回微分する。 $1+x^2$ は 3 回以上微分すると 0 になることに注意するとライブニッツの定理より

$$f^{(n)}(x)(1+x^2) + {}_n C_1 f^{(n-1)}(x)2x + {}_n C_2 f^{(n-2)}(x)2 = 0$$

となる。 $x = 0$ を代入することにより, $f^{(n)}(0) + n(n-1)f^{(n-2)}(0) = 0$ を得る。 $f(0) = 1$, $f'(0) = 0$, $f''(0) = 2$ より

$$f^{(2n-1)}(0) = 0, \quad f^{(2n)}(0) = (-1)^n (2n)!$$

が成立することが予想される。

まず奇数の場合を証明する。即ち「 $\forall n \in \mathbb{N} f^{(2n-1)}(0) = 0$ 」を示す。

(a) $n = 1$ のとき； $f'(x) = \frac{2x}{1+x^2}$ なので $f'(0) = 0$ となり，成立している。

(b) $n = k$ のとき成立を仮定する；即ち $f^{(2k-1)}(0) = 0$ を仮定する。任意の自然数 n に対し $f^{(n)}(0) + n(n-1)f^{(n-2)}(0) = 0$ が成立しているので， $n - 2 = 2k - 1$ とすると

$$f^{2k+1}(0) + (2k+1)2kf^{2k-1}(0) = 0$$

が得られる。よって $f^{2(k+1)-1}(0) = f^{2k+1}(0) = 0$ となり， $k+1$ のときも成立している。

次に偶数の場合を証明する。即ち即ち「 0 以上の自然数 n に対し $f^{(2n)}(0) = (-1)^n(2n)!$ 」を示す。

(a) $n = 0$ のとき； $f^{(0)}(0) = f(0) = \frac{1}{1+0^2} = (-1)^0(2 \cdot 0)!$ なので成立している。

(b) $n = k$ のとき成立を仮定する；即ち $f^{(2k)}(0) = (-1)^k(2k)!$ を仮定する。任意の自然数 n に対し $f^{(n)}(0) + n(n-1)f^{(n-2)}(0) = 0$ が成立しているので， $n - 2 = 2k$ とすると

$$f^{2k+2}(0) + (2k+2)(2k+1)f^{2k}(0) = 0$$

が得られる。よって

$$\begin{aligned} f^{2(k+1)}(0) &= -(2k+2)(2k+1)f^{2k}(0) \\ &= -(2k+2)(2k+1)(-1)^k(2k)! \\ &= (-1)^{k+1}(2(k+1))! \end{aligned}$$

となり， $k+1$ のときも成立している。

よって

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} f^{(k)}(0)x^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!} f^{(2k)}(0)x^{2k} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)!} f^{(2k-1)}(0)x^{2k-1} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!} f^{(2k)}(0)x^{2k} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!} (-1)^k (2k)! x^{2k} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{2k} \end{aligned}$$

を得る。

演習問題 1.8 次の関数を $x = a$ でテーラー (級数) 展開せよ (テーラー展開可能であることは仮定してよい)。

(1) $f(x) = x^5 \quad (a = 1)$

(2) $f(x) = e^x \quad (a = 1)$

(3) $f(x) = \sin x \quad (a = \pi)$

(4) $f(x) = \log x \quad (a = 1)$

(1) 導関数を求めてもよいが、多項式なので

$$\begin{aligned}x^5 &= \left((x-1) + 1 \right)^5 \\ &= 1 + 5(x-1) + 10(x-1)^2 + 10(x-1)^3 + 5(x-1)^4 + (x-1)^5\end{aligned}$$

と2項展開してもよい。

(2) $f(x) = e^x$ とおくと、 $f'(x) = e^x$ である。よって何回微分しても

$$f^{(n)}(x) = e^x$$

となる。そこまでやる必要はないかもしれないが、一応数学的帰納法でこの事実を確認しておく。示すべき命題は「 $\forall n \in \mathbb{N} f^{(n)}(x) = e^x$ 」である。

(a) $n = 1$ のとき $f^{(1)}(x) = f'(x) = e^x$ なので成立している。

(b) $n = k$ のとき成立を仮定する；即ち $f^{(k)} = e^x$ を仮定する。このとき

$$\begin{aligned}f^{(k+1)}(x) &= \left(f^{(k)}(x) \right)' \\ &= \left(e^x \right)' = e^x\end{aligned}$$

よってテーラー級数は

$$\begin{aligned}e^x &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} f^{(k)}(1)(x-1)^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e}{k!} (x-1)^k\end{aligned}$$

となる。

(3) $f(x) = \sin x$ とおくと $f'(x) = \cos x$, $f''(x) = -\sin x$, $f'''(x) = -\cos x$, $f^{(4)}(x) = \sin x$ となり、以下周期4で同じものが続く。よって

$$f^{2n}(x) = (-1)^n \sin x, \quad f^{(2n-1)}(x) = (-1)^{n+1} \cos x$$

と予想される。

まず偶数の場合を証明する。即ち即ち「0以上の自然数 n に対し $f^{(2n)}(x) = (-1)^n \sin x$ 」を示す。

(a) $n = 0$ のとき； $f^{(0)}(x) = f(x) = \sin x = (-1)^0 \sin x$ なので成立している。

(b) $n = k$ のとき成立を仮定する；即ち $f^{(2k)}(x) = (-1)^k \sin x$ を仮定する。

$$\begin{aligned}f^{2(k+1)}(x) &= \left(\left(f^{(2k)}(x) \right)' \right)' \\ &= \left(\left((-1)^k \sin x \right)' \right)' = \left((-1)^k \cos x \right)' \\ &= (-1)^k (-\sin x) \\ &= (-1)^{k+1} \sin x\end{aligned}$$

となり、 $k+1$ のときも成立している。

次に奇数の場合を証明する。即ち「 $\forall n \in \mathbb{N} f^{(2n-1)}(x) = (-1)^{n+1} \cos x$ 」を示す。

(a) $n = 1$ のとき； $f'(x) = (\sin x)' = \cos x = (-1)^{1+1} \cos x$ なので成立している。

(b) $n = k$ のとき成立を仮定する；即ち $f^{(2k-1)}(x) = (-1)^{k+1} \cos x$ を仮定する。

$$\begin{aligned} f^{(2(k+1)-1)}(x) &= \left(\left(f^{(2k-1)}(x) \right)' \right)' \\ &= \left(\left((-1)^{k+1} \cos x \right)' \right)' = \left((-1)^{k+1} (-\sin x) \right)' \\ &= (-1)^{k+1} (-\cos x) \\ &= (-1)^{(k+1)+1} \cos x \end{aligned}$$

となり， $k+1$ のときも成立している。 $f^{(2k)}(\pi) = (-1)^k \sin \pi = 0$ ， $f^{(2k-1)}(\pi) = (-1)^{k+1} \cos \pi = (-1)^{k+1}(-1) = (-1)^k$ ，なので

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} f^{(k)}(\pi)(x-\pi)^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!} f^{(2k)}(\pi)(x-\pi)^{2k} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)!} f^{(2k-1)}(\pi)(x-\pi)^{2k-1} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)!} f^{(2k-1)}(\pi)(x-\pi)^{2k-1} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)!} (-1)^k (x-\pi)^{2k-1} \end{aligned}$$

を得る。

(4) $f(x) = \log x$ に対しては， $f'(x) = \frac{1}{x}$ ， $f''(x) = -\frac{1}{x^2}$ ， $f'''(x) = \frac{2}{x^3}$ ，となる。 n 次導関数は $f^{(n)}(x) = (-1)^{n+1} \frac{(n-1)!}{x^n}$ と予想される。これを数学的帰納法で証明する。

(a) $n = 1$ のとき：

$$f^{(1)}(x) = f'(x) = \frac{1}{x} = (-1)^{1+1} \frac{(1-1)!}{x^1}$$

なので $n = 1$ のとき予想は正しい。

(b) $n = k$ のとき成立を仮定する；即ち $f^{(k)}(x) = (-1)^{k+1} \frac{(k-1)!}{x^k}$ の成立を仮定する。 $f^{(k)}(x)$ を微分すると

$$\begin{aligned} f^{(k+1)}(x) &= \left(f^{(k)}(x) \right)' = \left((-1)^{k+1} \frac{(k-1)!}{x^k} \right)' \\ &= (-1)^{k+1} (k-1)! \frac{-k}{x^{k+1}} \\ &= (-1)^{(k+1)+1} \frac{((k+1)-1)!}{x^{k+1}} \end{aligned}$$

が得られるので， $k+1$ のときも成立している。よって任意の自然数 n に対し

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n+1} \frac{(n-1)!}{x^n}$$

が成立する。

$f^{(k)}(1) = (-1)^{k+1} \frac{(k-1)!}{1^k} = (-1)^{k+1} (k-1)!$, および $f(1) = \log 1 = 0$ なので

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} f^{(k)}(1) (x-1)^k \\ &= f(1) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} (-1)^{k+1} (k-1)! (x-1)^k \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{k} (x-1)^k \end{aligned}$$

となる。

$$f(x) = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \cdots + a_n(x-a)^n + \cdots$$

とテーラー展開されているときには $a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$ である。 n 次導関数を求めなくとも何らかの方法で求めてもよい。

例えば、演習問題 1.7 (2) では等比数列の和から求めることもできる。

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots$$

が得られているとき、この式の x に $-x$ を代入すると

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+x} &= \frac{1}{1-(-x)} \\ &= 1 + (-x) + (-x)^2 + \cdots + (-x)^n + \cdots \\ &= 1 - x + x^2 + \cdots + (-1)^n x^n + \cdots \end{aligned}$$

となり (4) を得る。更にこの式に x^2 を代入すると

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+x^2} &= \frac{1}{1+(x^2)} \\ &= 1 - x^2 + x^4 + \cdots + (-1)^n x^{2n} \cdots \end{aligned}$$

となり (5) を得る。