解析学I問題解説 #5

河野

演習問題 1.9　以下の関数のグラフの概形を描け。

(1) $f(x) = 2x^2 - x^4$　(2) $f(x) = xe^{-x}$　(3) $f(x) = x^2 \log x$

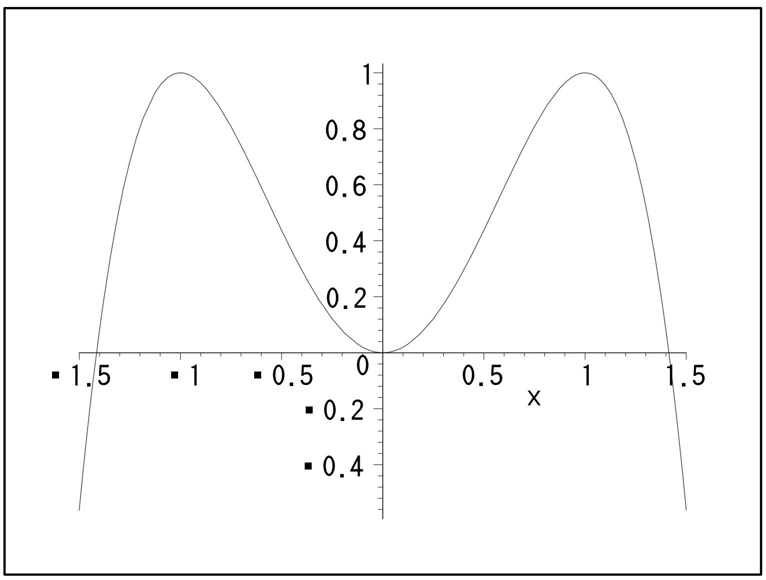
(4) $f(x) = 3\sin x + \sin 3x$　(5) $f(x) = x - \sqrt{1+x}$　(6) $f(x) = \left(1 - \dfrac{1}{x}\right)^{\frac{2}{3}}$

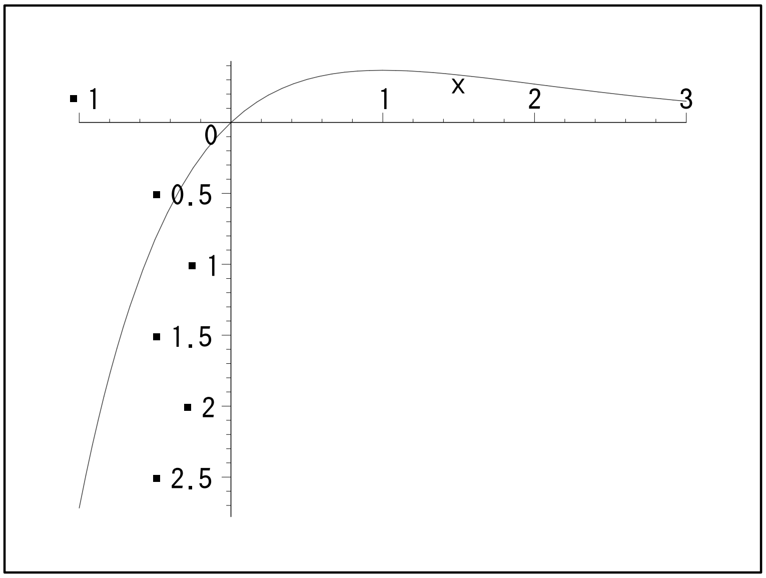
(7) $f(x) = x + 2\cos x$　(8) $f(x) = \sin x(1 + \cos x)$　(9) $f(x) = x^{-x^2}$

(1)　$f'(x) = 4x - 4x^3 = 4x(1-x^2) = 4x(1-x)(1+x)$ なので $f'(x) = 0$ となるのは $x = -1, 0, 1$ である。増減表は次のようになる。

x		-1		0		1	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	1	$\searrow$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$

$f(x) = 2x^2 - x^4 = 0$ を解くと $x = 0, \pm\sqrt{2}$ となる。よって曲線は x 軸と 3 点で交わっている。($x = 0$ は重解なので接している。) このことに注意して概形を描くと次図のようになる。変換に問題があって以下のグラフの中のマイナス (–) が黒点に変わっています。注意を。





(2) $f'(x) = e^{-x} - xe^{-x} = (1-x)e^{-x}$ なので $f'(x) = 0$ となるのは $x = 1$ のときのみである。増減表は次のようになる。

x		1	
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	e^{-1}	$\searrow$

$\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ および $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ ということに注意してグラフを描くと前図のようになる。

(3) $\log x$ が定義されるのは $x > 0$ なので $f(x)$ の定義域も $x > 0$ である。$f'(x) = 2x\log x + x^2\dfrac{1}{x} = x(2\log x + 1) = 0$ を解いて，$x = \sqrt{\dfrac{1}{e}}$ を得る。よって増減表は次の様になる。

x		$\sqrt{\dfrac{1}{e}}$	
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	$-\dfrac{1}{2e}$	$\nearrow$

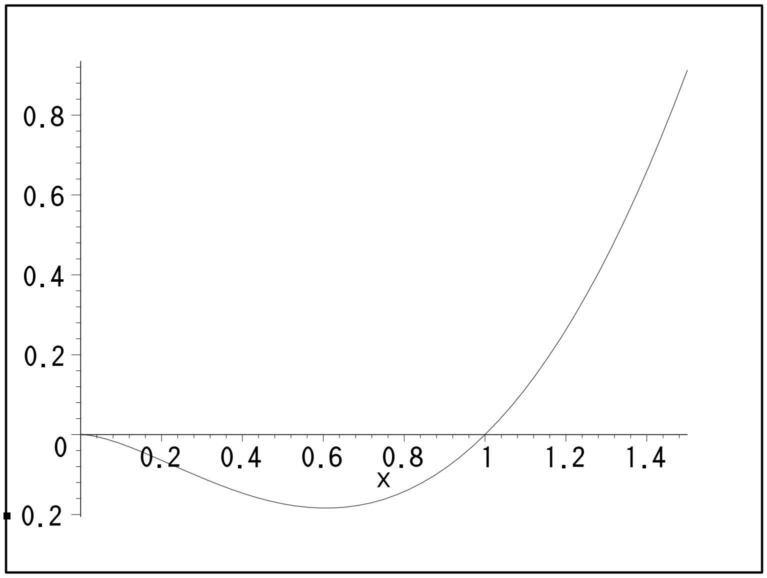
$x \to +0$ としたときの関数の挙動を調べる。ここでは後で学ぶロピタルの定理を用いる。

$$\lim_{x\to+0} x^2\log x = \lim_{x\to+0}\frac{\log x}{\dfrac{1}{x^2}} = \lim_{x\to+0}\frac{\left(\log x\right)'}{\left(\dfrac{1}{x^2}\right)'}$$

$$= \lim_{x\to+0}\frac{\dfrac{1}{x}}{-\dfrac{2}{x^3}}$$

$$= -\frac{1}{2}\lim_{x\to+0} x^2 = 0$$

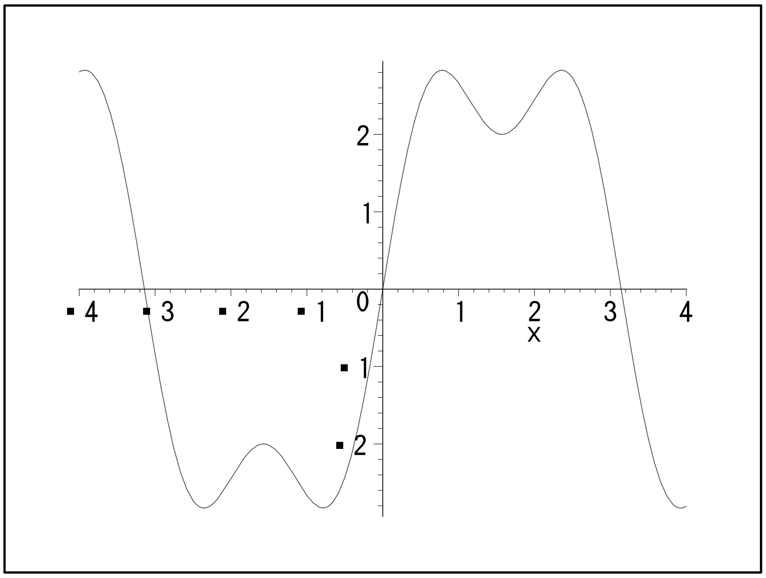
$\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ であり，また $f(x) = 0$ となるのは $x = 1$ のときのみである。このことに注意してグラフを描くと次図の様になる。



(4) $\sin x$ は周期 2π の周期関数であり，$\sin 3x$ は周期 $\dfrac{2\pi}{3}$ の周期関数である。よって $-\pi \leqq x \leqq \pi$ の範囲でグラフを描き，それを x 軸の方向へ $2n\pi$(n は整数) 平行移動したグラフが求めるグラフとなる。よって $-\pi \leqq x \leqq \pi$ の範囲で調べる。

$f'(x) = 3\cos x + 3\cos 3x = 3\cos x + 3(4\cos^3 x - 3\cos x) = 6\cos x\bigl(2\cos^2 x - 1\bigr) = 0$ となるのは $\cos x = 0$ または $\cos^2 x = \dfrac{1}{2}$ なので，$-\pi \leqq x \leqq \pi$ の範囲では $x = -\dfrac{3}{4}\pi, -\dfrac{1}{2}\pi, -\dfrac{1}{4}\pi, \dfrac{1}{4}\pi, \dfrac{1}{2}\pi, \dfrac{3}{4}\pi$ である。よって増減表は次のようになる。

x		$\frac{3}{4}\pi$		$-\frac{1}{2}\pi$		$-\frac{1}{4}\pi$		$\frac{1}{4}\pi$		$\frac{1}{2}\pi$		$\frac{3}{4}\pi$	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	$-\frac{4}{\sqrt{2}}$	$\nearrow$	-2	$\searrow$	$-\frac{4}{\sqrt{2}}$	$\nearrow$	$\frac{4}{\sqrt{2}}$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$\frac{4}{\sqrt{2}}$	$\searrow$



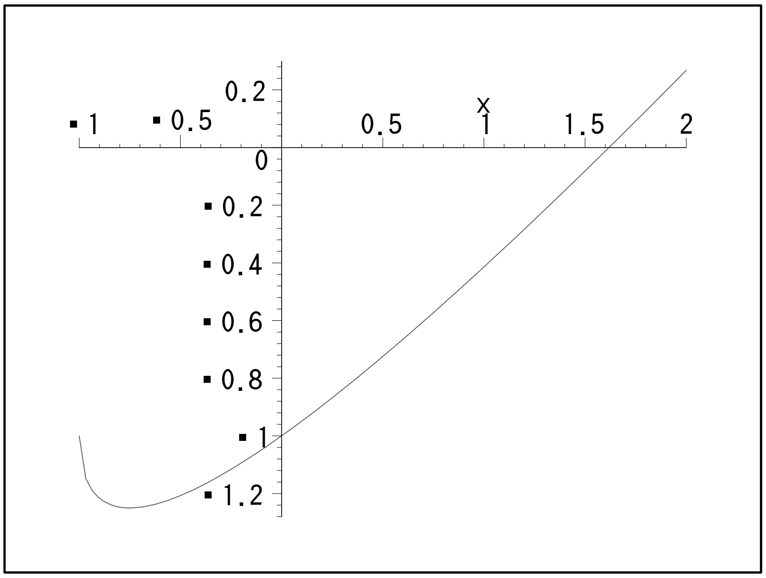
(5) $f(x) = x - \sqrt{1+x}$ は $1+x \geqq 0$ で定義されている。$f'(x) = 1 - \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{\sqrt{1+x}}$ なので $f'(x) = 0$ より $x = -\dfrac{3}{4}$ となる。

x		$-\dfrac{3}{4}$	
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$

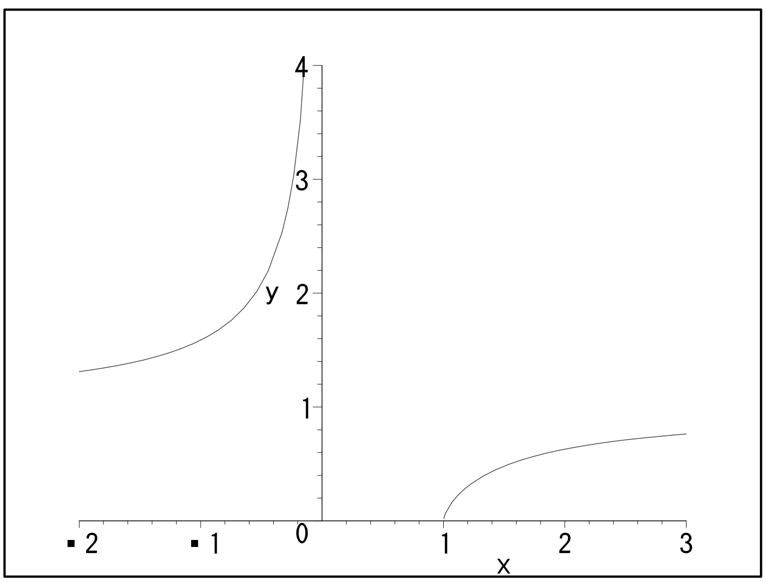
$f(x) = 0$ とすると $x - \sqrt{1+x} = 0$ より $x = \sqrt{1+x}$ となる。両辺を 2 乗して

$$x^2 = 1 + x$$

を得る。この 2 次方程式の解は $x = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ である。しかし $x = \sqrt{1+x} \geqq 0$ より $x = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ は不適である。また $f(0) = 0 - \sqrt{1+0} = -1$ である。以上のことに注意してグラフを描くと次図のようになる。



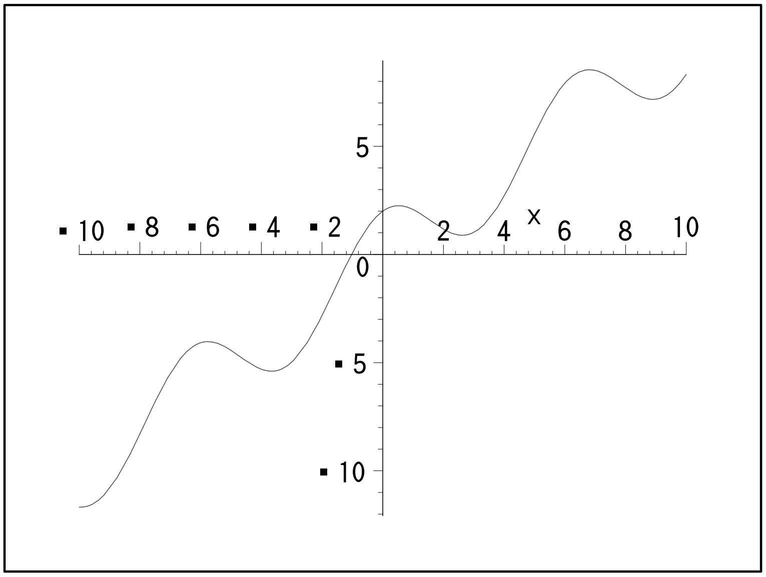
(6) $f(x)=\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^{\frac{2}{3}}$ なので $1-\dfrac{1}{x}\geqq 0$ が必要である。$x\geqq 0$ のときは $1\geqq\dfrac{1}{x}$ より $x\geqq 1$ である。$x<0$ のときは常に $1-\dfrac{1}{x}\geqq 0$ である。$f'(x)=\dfrac{2}{3}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^{-\frac{1}{3}}\dfrac{1}{x^2}$ $x=1$ においては微分可能ではない。それ以外では $f'(x)>0$ である。$\lim\limits_{h\to -0}f(x)=\infty$ ということに注意してグラフを描くと次図のようになる。

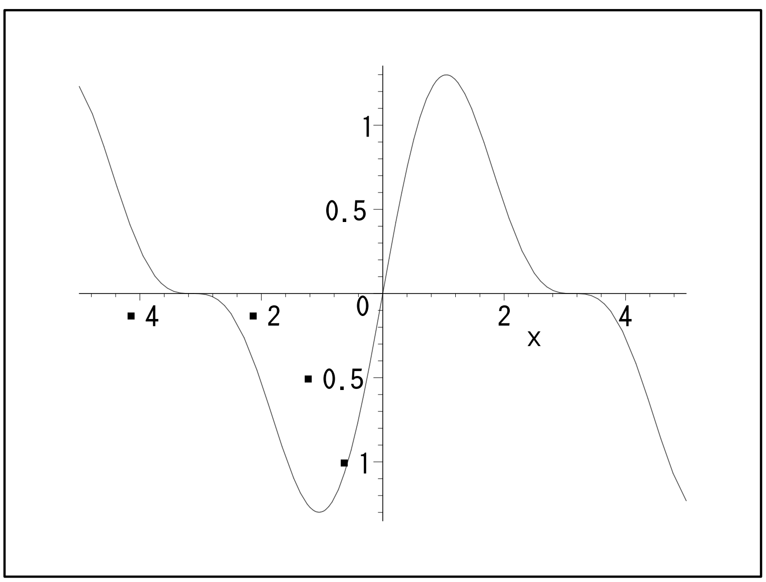


(7) $f(x)=x+2\cos x$ なので $f'(x)=1-2\sin x$ である。$f'(x)=0$ となるのは $2n\pi+\dfrac{\pi}{6}, 2n\pi+\dfrac{5\pi}{6}$

(n は整数) である。増減表とグラフは次のようになる。

x		$2n\pi+\dfrac{\pi}{6}$		$2n\pi+\dfrac{5\pi}{6}$		$2(n+1)\pi+\dfrac{\pi}{6}$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	$2n\pi+\dfrac{\pi}{6}+\sqrt{3}$	$\searrow$	$2n\pi+\dfrac{5\pi}{6}-\sqrt{3}$	$\nearrow$	$2(n+1)\pi+\dfrac{\pi}{6}+\sqrt{3}$	$\searrow$





(8)　$f(x)$ は周期 2π の周期関数なので $-\pi \leqq x \leqq \pi$ の範囲で考える。$f'(x) = \cos x(1+\cos x) - \sin^2 x = \cos + \cos^2 x - (1-\cos^2 x) = 2\cos^2 x + \cos x - 1 = (2\cos x - 1)(\cos x + 1) = 0$ とすると，$\cos x + 1 = 0$ または $2\cos x - 1 = 0$ である。$\cos x + 1 = 0$ のとき $x = -\pi, \pi$ である。$2\cos x - 1 = 0$

のとき $x=-\dfrac{\pi}{3},\dfrac{\pi}{3}$ である。増減表は次のようになるので，グラフは前図の様になる。

x	$-\pi$		$-\dfrac{\pi}{3}$		$\dfrac{\pi}{3}$		π
$f'(x)$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0
$f(x)$	0	$\searrow$	$-\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$	$\nearrow$	$\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$	$\searrow$	0

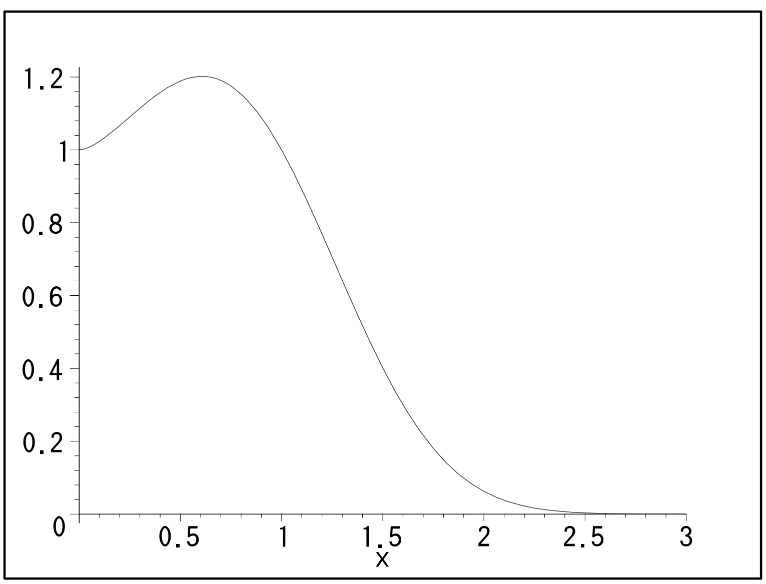
(9) $f(x)=x^{-x^2}$ なので定義域は $x>0$ である。導関数を求めるのに対数微分法を用いる。$y=x^{-x^2}$ とすると $\log y=-x^2\log x$ である。両辺を x で微分すると $\dfrac{1}{y}y'=-2x\log x-x^2\dfrac{1}{x}=-2x\log x-1$ なので $y'=-x\cdot x^{-x^2}\big(2\log x+1\big)$ となる。$f'(x)=0$ とすると，$2\log x+1=0$ なので $x=e^{-\frac{1}{2}}$ となる。増減表は

x		$e^{-\frac{1}{2}}$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	$f(e^{-\frac{1}{2}})$	$\searrow$

となる。$\displaystyle\lim_{x\to\infty}f(x)=0$ である。また $\displaystyle\lim_{x\to+0}f(x)$ を求める。$\log y=-x^2\log x$ の極限を求める。

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+0}\log f(x)&=\lim_{x\to+0}\big(-x^2\log x\big)=-\lim_{x\to+0}\frac{\log x}{\dfrac{1}{x^2}}\\&=-\lim_{x\to+0}\frac{\big(\log x\big)'}{\left(\dfrac{1}{x^2}\right)'}=-\lim_{x\to+0}\frac{\dfrac{1}{x}}{-2\dfrac{1}{x^3}}\\&=\frac{1}{2}\lim_{x\to+0}x^2=0\end{aligned}$$

なので，$0=\displaystyle\lim_{x\to+0}\log f(x)=\log\left(\lim_{x\to+0}f(x)\right)$ となる。よって $\displaystyle\lim_{x\to+0}f(x)=1$ となる。以上を考慮してグラフを書くと次図のようになる。



演習問題 *1.10　$x_1, x_2 \in [\,a,\,b\,]$ に対し $F(x) = \dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}(x-x_1)+f(x_1)-f(x)$ とおき，$F(x)$ の正負を調べることにより命題 1.27 を証明せよ。

$f''(x)<0$ の場合も同様にできるので，$f''(x)>0$ の場合のみ証明する。$x_1<x_2$ としても一般性を失わないので，この場合を考える。

$$\begin{aligned} F(x_1) &= \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}(x_1-x_1)+f(x_1)-f(x_1) \\ &= f(x_1)-f(x_1)=0 \\ F(x_2) &= \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}(x_2-x_1)+f(x_1)-f(x_2) \\ &= f(x_2)-f(x_1)+f(x_1)-f(x_2)=0 \end{aligned}$$

が成立しているので，$F(x)$ の $[\,x_1,\,x_2\,]$ における最大値，または最小値を与える x_3 で $x_1<x_3<x_2$ となるものが存在する。このとき $x=x_3$ で $F(x)$ は極大または極小なので $F'(x_3)=0$ が成立している。$F''(x)=-f''(x)<0$ なので $F'(x)$ は $[\,x_1,\,x_2\,]$ で単調減少である。よって $F'(x)$ の $[\,x_1,\,x_2\,]$ における増減表は次のようになっている。

x	x_1		x_3		x_2
$F''(x)$		$-$		$-$	
$F'(x)$		$\searrow$	0	$\searrow$	

よって $(\,x_1,\,x_3\,)$ において $F'(x)>0$，$(\,x_3,\,x_2\,)$ において $F'(x)<0$ である。よって $F(x)$ の増減表は次のようになっている。

x	x_1		x_3		x_2
$F'(x)$		$+$	0	$-$	
$F(x)$	0	$\nearrow$		$\searrow$	0

よって $(\,x_1,\,x_2\,)$ において $F(x)>0$ となるので

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}(x-x_1)+f(x_1)>f(x)$$

が成立し，上に凸であることが示された。

演習問題 1.11　次の関数のグラフの凹凸を調べ概形を描け。

(1) $y=(x-5)^4(x+1)^3$　　(2) $y=\dfrac{x^2+1}{x}$

(3) $y=e^{-x^2}$　　(4) $y=x\log x$

(1)

$$\begin{aligned} y' &= 4(x-5)^3(x+1)^3+3(x-5)^4(x+1)^2 \\ &= (x-5)^3(x+1)^2\left\{4(x+1)+3(x-5)\right\} \\ &= (x-5)^3(x+1)^2(7x-11) \end{aligned}$$

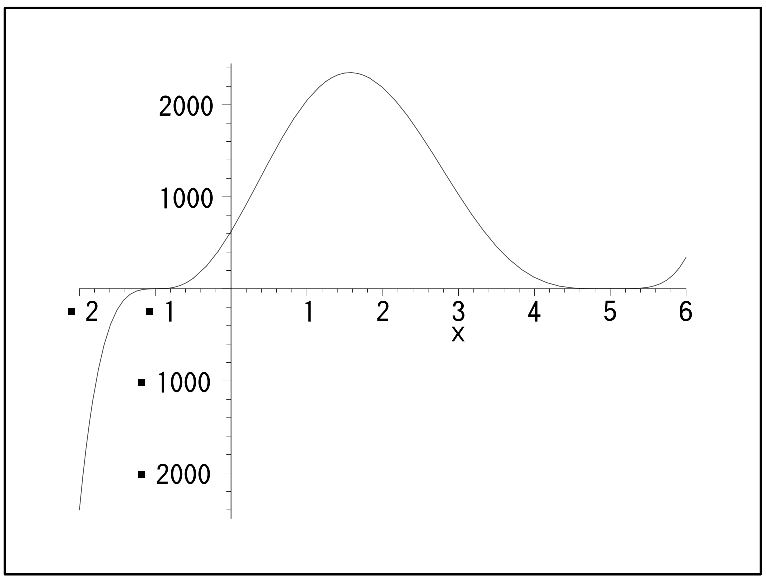
なので $y'=0$ を解いて $x=-1$，5，$\dfrac{11}{7}$ を得る。

$$y'' \quad = \quad 6(x-5)^2(x+1)(7x^2-22x+7)$$

なので $y''=0$ を解いて $x=-1$，5，$\dfrac{11+6\sqrt{2}}{7}$，$\dfrac{11-6\sqrt{2}}{7}$ を得る。よって増減表は次の様になる。

x		-1		$\frac{11-6\sqrt{2}}{7}$		$\frac{11}{7}$		$\frac{11+6\sqrt{2}}{7}$		5	
y'	$+$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
y''	$-$	0	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
y	↗		↗		↗		↘		↘		↗

x 軸との交点は $y=0$ を解いて $x=-1,5$ である。y 軸との交点は y に $x=0$ を代入して $(-5)^4=5^4$ である。以上を考慮してグラフの概形を描くと次のようになっている。



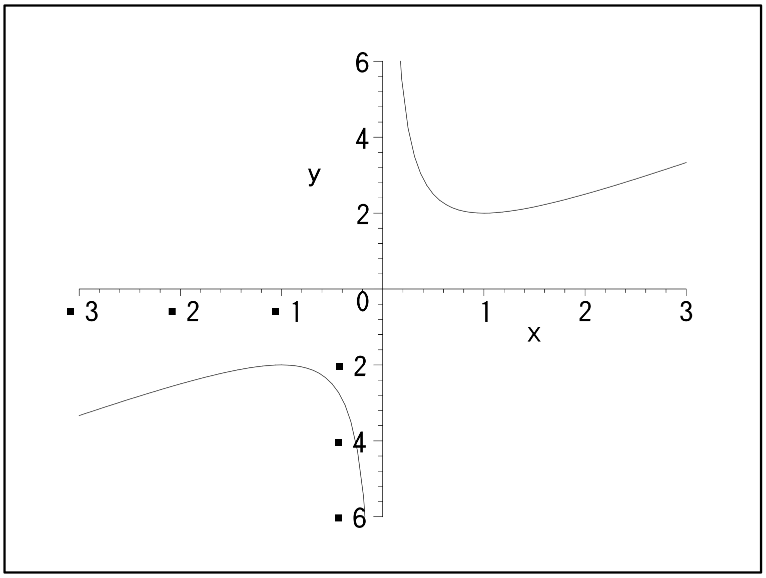
(2) $y'=1-\dfrac{1}{x^2}$ なので $y'=0$ を解いて $x=-1$，1 を得る。$y''=\dfrac{2}{x^3}$ なので増減表は次の様になる。

x		-1		0		1	
y'	$+$	0	$-$	$\times$	$-$	0	$+$
y''	$-$	$-$	$-$	$\times$	$+$	$+$	$+$
y	↗		↘	$\times$	↘		↗

グラフは x 軸とも y 軸とも交わらない。

$$\lim_{x\to+0} y=\infty, \quad \lim_{x\to-0} y=-\infty, \quad \lim_{x\to\infty} y=\infty, \quad \lim_{x\to-\infty} y=-\infty$$

なのでグラフの概形は次のようになる。



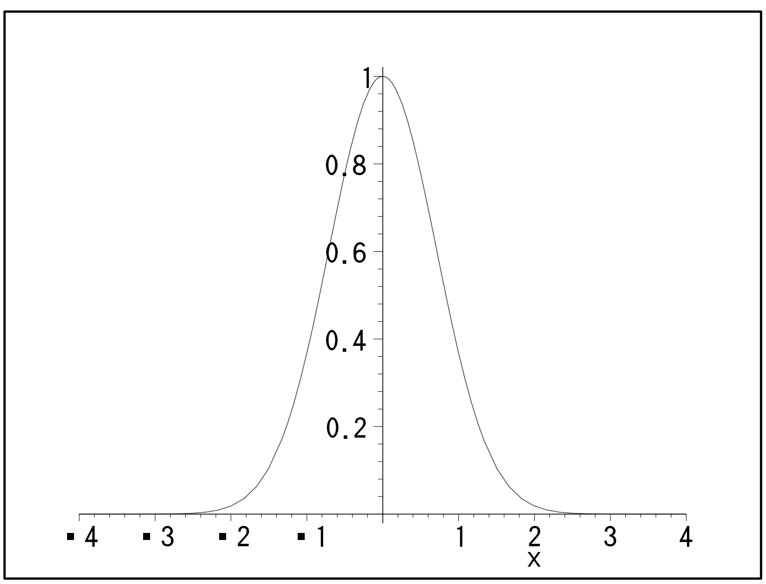
(3) $y' = -2xe^{-x^2}$ なので $y' = 0$ を解いて $x = 0$ を得る。$y'' = -2e^{-x^2} + 4x^2e^{-x^2}$ なので $y'' = 0$ を解いて $x = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，$\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ を得る。よって増減表は次の様になる。

x		$-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$		0		$\dfrac{1}{\sqrt{2}}$	
y'	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
y''	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
y	↗		↗		↘		↘

グラフは x 軸とは交わらない。y 軸との交点は $y = 1$ である。また

$$\lim_{x\to\infty} y = 0, \quad \lim_{x\to-\infty} y = 0$$

なのでグラフの概形は次のようになる。



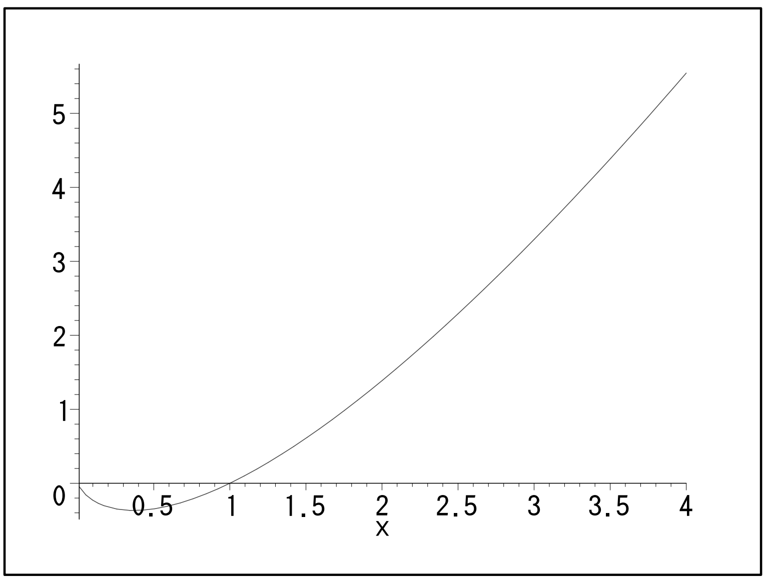
(4) $y' = \log x + 1$ なので $y' = 0$ を解いて $x = \dfrac{1}{e}$ を得る。$y'' = \dfrac{1}{x}$ なので $y'' = 0$ となる x は存在しない。よって増減表は次の様になる。

x	0		$\frac{1}{e}$	
y'	$\times$	$-$	0	$+$
y''	$\times$	$+$	$+$	$+$
y		$\searrow$		$\nearrow$

x 軸との交点は $x = 1$ であり，y 軸とは交わらない。また $\lim_{x\to\infty} y = \infty$ である。この後学んだロピタルの定理を用いると

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+0} x\log x &= \lim_{x\to+0} \frac{\log x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to+0} \frac{\left(\log x\right)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} \\ &= \lim_{x\to+0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = -\lim_{x\to+0} x = 0\end{aligned}$$

が分かる。以上からグラフの概形は次のようになっている。



演習問題 1.12　次のようにパラメータ表示された曲線の概形を書け。

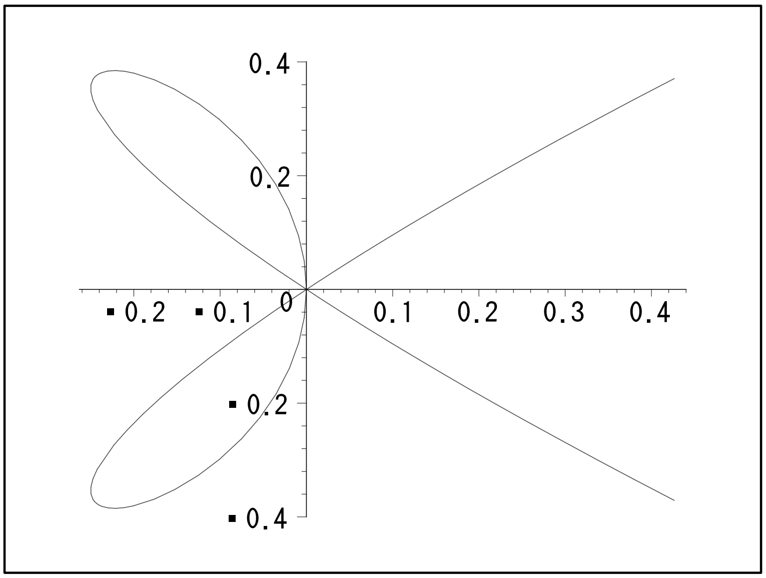
(1) $x = x(t) = t^4 - t^2, y = y(t) = t^3 - t$

(2) $x = x(t) = t - t^3, y = y(t) = 1 - t^4$

(1) $x'(t) = 4t^3 - 2t = 2t(2t^2 - 1) = 0$ より $x = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}, 0, \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ となる。$y'(t) = 3t^2 - 1 = 0$ より $t = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}, \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ となる。増減表を書くと

t		$-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$		$-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$		0		$\dfrac{1}{\sqrt{3}}$		$\dfrac{1}{\sqrt{2}}$	
$x'(x)$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$x(x)$	$\leftarrow$	$-\dfrac{1}{4}$	$\rightarrow$	$-\dfrac{2}{9}$	$\rightarrow$	0	$\leftarrow$	$-\dfrac{2}{9}$	$\leftarrow$	$-\dfrac{1}{4}$	$\rightarrow$
$y'(t)$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$y(t)$	$\uparrow$	$\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$	$\uparrow$	$\dfrac{2}{3\sqrt{3}}$	$\downarrow$	0	$\downarrow$	$-\dfrac{2}{3\sqrt{3}}$	$\uparrow$	$-\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$	$\uparrow$
曲線	$\nwarrow$	$\uparrow$	$\nearrow$	$\rightarrow$	$\searrow$	$\downarrow$	$\swarrow$	$\leftarrow$	$\nwarrow$	$\uparrow$	$\nearrow$

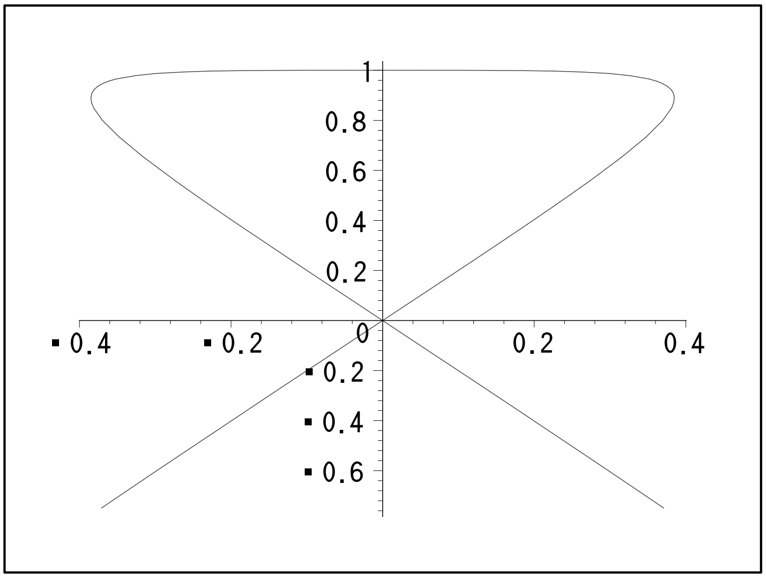
となる。x 軸との交わりは $y(t)=0$ を解いて $t=-1,0,1$，y 軸との交わりは $x(t)=0$ を解いて $t=-1,0,1$ であり，この点はいずれも原点である。これを元に曲線を描くと次図のようになる。



(2) $x'(t)=1-3t^2=0$ より $t=-\dfrac{1}{\sqrt{3}},\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ となる。$y'(t)=-4t^3=0$ より $t=0$ となる。$x(t)=0$ を解くと $t=-1,0,1$ となる。y 軸との交点は $(x(-1),y(-1))=(0,0)$，$(x(0),y(0))=(0,1)$，$(x(1),y(1))=(0,0)$ である。$y(t)=0$ を解くと $t=-1,1$ である。増減表を書くと

t		$-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$		0		$\dfrac{1}{\sqrt{3}}$	
$x'(x)$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$
$x(t)$	$\leftarrow$	$-\dfrac{2}{3\sqrt{3}}$	$\rightarrow$	0	$\rightarrow$	$\dfrac{1}{2\sqrt{3}}$	$\leftarrow$
$y'(t)$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$y(x)$	$\uparrow$	$\dfrac{8}{9}$	$\uparrow$	1	$\downarrow$	$\dfrac{8}{9}$	$\downarrow$
曲線	$\nwarrow$	$\uparrow$	$\nearrow$	$\rightarrow$	$\searrow$	$\downarrow$	$\swarrow$

となる。これを元に曲線を描くと次図のようになる。


1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
-0.6
-0.4
-0.2
0.2
0.4