

演習問題 2.4

$$z(x+h, y+k) = z(x, y) + Ah + Bk + \varepsilon(h, k)\sqrt{h^2 + k^2}$$

に対し $\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \varepsilon(h, k) = 0$ が成立するとき, z は全微分可能であり, $A = z_x(x, y), B = z_y(x, y)$ が成立することを示せ。

$z(x+h, y)$ は $z(x+h, y+k)$ において $k=0$ としたものなので,

$$z(x+h, y) = z(x, y) + Ah + \varepsilon(h, 0)\sqrt{h^2 + 0^2}$$

が成立する。よって

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{z(x+h, y) - z(x, y)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{Ah + \varepsilon(h, 0)\sqrt{h^2 + 0^2}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(A + \varepsilon(h, 0) \frac{|h|}{h} \right) = A \end{aligned}$$

となる。よって z は x に関して偏微分可能であり, $z_x = A$ となる。

$z(x, y+k)$ は $z(x+h, y+k)$ において $h=0$ としたものなので,

$$z(x, y+k) = z(x, y) + Bk + \varepsilon(0, k)\sqrt{0^2 + k^2}$$

が成立する。よって

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial y} &= \lim_{k \rightarrow 0} \frac{z(x, y+k) - z(x, y)}{k} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{Bk + \varepsilon(0, k)\sqrt{0^2 + k^2}}{k} \\ &= \lim_{k \rightarrow 0} \left(B + \varepsilon(0, k) \frac{|k|}{k} \right) = B \end{aligned}$$

となる。よって z は y に関して偏微分可能であり, $z_y = B$ となる。

演習問題 *2.5

$$\varepsilon(h, k) = z_x \varepsilon_1(h, k) + z_y \varepsilon_2(h, k) + \frac{\varepsilon_3(H, K)\sqrt{H^2 + K^2}}{\sqrt{h^2 + k^2}}$$

とおくと $\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \varepsilon(h, k) = 0$ が成立する事を示せ。

$(h, k) \rightarrow (0, 0)$ のとき $\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \varepsilon_1(h, k) = 0$ かつ $\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \varepsilon_2(h, k) = 0$ が成立するので,

$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{\varepsilon_3(H, K)\sqrt{H^2 + K^2}}{\sqrt{h^2 + k^2}} = 0$ を示せばよい。

$(h, k) \rightarrow (0, 0)$ のとき $\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} H = 0$ および $\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} K = 0$ が成立するので,

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \varepsilon_3(H, K) = 0$$

が成立することに注意しておく。また

$$|h| \leq \sqrt{h^2 + k^2}, \quad |k| \leq \sqrt{h^2 + k^2}$$

が成立することにも注意しておく。簡単のため $x_s(s, t), x_t(s, t), y_s(s, t), y_t(s, t), \varepsilon_1(h, k), \varepsilon_2(h, k)$ をそれぞれ $x_s, x_t, y_s, y_t, \varepsilon_1, \varepsilon_2$ と略記すると,

$$H = x_s h + x_t k + \varepsilon_1 \sqrt{h^2 + k^2}$$

$$K = y_s h + y_t k + \varepsilon_2 \sqrt{h^2 + k^2}$$

と書ける。

$$\begin{aligned} H^2 &= \left(x_s h + x_t k + \varepsilon_1 \sqrt{h^2 + k^2} \right)^2 \\ &= x_s^2 h^2 + x_t^2 k^2 + \varepsilon_1^2 (h^2 + k^2) + 2x_s h x_t k + 2x_s h \varepsilon_1 \sqrt{h^2 + k^2} + 2x_t k \varepsilon_1 \sqrt{h^2 + k^2} \\ &\leq x_s^2 h^2 + x_t^2 k^2 + \varepsilon_1^2 (h^2 + k^2) + 2|x_s||x_t||h||k| + 2|x_s||\varepsilon_1||h|\sqrt{h^2 + k^2} + 2|x_t||\varepsilon_1||k|\sqrt{h^2 + k^2} \\ &\leq x_s^2 (h^2 + k^2) + x_t^2 (h^2 + k^2) + \varepsilon_1^2 (h^2 + k^2) + 2|x_s||x_t|(h^2 + k^2) \\ &\quad + 2|x_s||\varepsilon_1|\sqrt{h^2 + k^2}\sqrt{h^2 + k^2} + 2|x_t||\varepsilon_1|\sqrt{h^2 + k^2}\sqrt{h^2 + k^2} \\ &= (x_s^2 + x_t^2 + \varepsilon_1^2 + 2|x_s||x_t| + 2|x_s||\varepsilon_1| + 2|x_t||\varepsilon_1|) (h^2 + k^2) \end{aligned}$$

となるので $S = x_s^2 + x_t^2 + \varepsilon_1^2 + 2|x_s||x_t| + 2|x_s||\varepsilon_1| + 2|x_t||\varepsilon_1|$ とおくと $H^2 \leq S(h^2 + k^2)$ が得られる。同様の議論で $T = y_s^2 + y_t^2 + \varepsilon_2^2 + 2|y_s||y_t| + 2|y_s||\varepsilon_2| + 2|y_t||\varepsilon_2|$ とおくと $K^2 \leq T(h^2 + k^2)$ が得られる。

$$\begin{aligned} \left| \frac{\varepsilon(H, K) \sqrt{H^2 + K^2}}{h^2 + k^2} \right| &\leq |\varepsilon(H, K)| \frac{\sqrt{S(h^2 + k^2) + T(h^2 + k^2)}}{\sqrt{h^2 + k^2}} \\ &= |\varepsilon(H, K)| \frac{\sqrt{S + T} \sqrt{h^2 + k^2}}{\sqrt{h^2 + k^2}} \\ &= |\varepsilon(H, K)| \sqrt{S + T} \end{aligned}$$

から $\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{\varepsilon_3(H, K) \sqrt{H^2 + K^2}}{\sqrt{h^2 + k^2}} = 0$ が成立することが分かる。

演習問題 2.6 次の関数について z_s, z_t および $z_{ss}, z_{st}, z_{ts}, z_{tt}$ を求めよ。

(1) $z = \sin x \cos y, x = s^2 - t^2, y = 2st$

(2) $z = \sin(x^2 + y^2), x = s + t, y = st$

(3) $z = \sin(x + 2y), x = \frac{t}{s}, y = \frac{s}{t}$

(1) $z_x = \cos x \cos y, z_y = -\sin x \sin y, x_s = 2s, x_t = -2t, y_s = 2t, y_t = 2s$ なので

$$z_s = z_x x_s + z_y y_s = \cos x \cos y \cdot 2s - \sin x \sin y \cdot 2t$$

$$= 2s \cos x \cos y - 2t \sin x \sin y$$

$$z_t = z_x x_t + z_y y_t = \cos x \cos y \cdot (-2t) - \sin x \sin y \cdot 2s$$

$$-2t \cos x \cos y - 2s \sin x \sin y$$

となる。これを更に s および t で微分すると

$$\begin{aligned} z_{ss} &= (z_s)_s = (2s \cos x \cos y - 2t \sin x \sin y)_s \\ &= (2s \cos x \cos y)_s - (2t \sin x \sin y)_s \\ &= (2s)_s \cos x \cos y + 2s (\cos x \cos y)_s - 2t (\sin x \sin y)_s \\ &= 2 \cos x \cos y + 2s (\cos x)_s \cos y + 2s \cos x (\cos y)_s - 2t (\sin x)_s \sin y - 2t \sin x (\sin y)_s \\ &= 2 \cos x \cos y - 2s \sin x \cdot 2s \cos y - 2s \cos x \sin y \cdot (2t) - 2t \cos x \cdot 2s \sin y - 2t \sin x \cos y \cdot (2t) \\ &= 2 \cos x \cos y - 4(s^2 + t^2) \sin x \cos y - 8st \cos x \sin y \\ z_{st} &= (z_s)_t = (2s \cos x \cos y - 2t \sin x \sin y)_t \\ &= (2s \cos x \cos y)_t - (2t \sin x \sin y)_t \\ &= 2s (\cos x \cos y)_t - (2t)_t \sin x \sin y - 2t (\sin x \sin y)_t \\ &= 2s (\cos x)_t \cos y + 2s \cos x (\cos y)_t - 2 \sin x \sin y - 2t (\sin x)_t \sin y - 2t \sin x (\sin y)_t \\ &= -2 \sin x \sin y + 4(t^2 - s^2) \cos x \sin y \end{aligned}$$

以下同様に計算して

$$\begin{aligned} z_{ts} &= -2 \sin x \sin y + 4(t^2 - s^2) \cos x \sin y \\ z_{tt} &= -2 \cos x \cos y - 4(s^2 + t^2) \sin x \cos y + 8st \cos x \sin y \end{aligned}$$

を得る。

以下は結果のみを記す。

(2)

$$\begin{aligned} z_s &= 2(s + t + st^2) \cos(x^2 + y^2) \\ z_t &= 2(s + t + s^2t) \cos(x^2 + y^2) \\ z_{ss} &= 2(1 + t^2) \cos(x^2 + y^2) - 4(s + t + st^2)^2 \sin(x^2 + y^2) \\ z_{st} &= 2(1 + 2st) \cos(x^2 + y^2) - 4(s + t + st^2)(s + t + s^2t) \sin(x^2 + y^2) \\ z_{ts} &= 2(1 + 2st) \cos(x^2 + y^2) - 4(s + t + st^2)(s + t + s^2t) \sin(x^2 + y^2) \\ z_{tt} &= 2(1 + s^2) \cos(x^2 + y^2) - 4(s + t + s^2t)^2 \sin(x^2 + y^2) \end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned} z_s &= \left(\frac{2}{t} - \frac{t}{s^2} \right) \cos(x + 2y) \\ z_t &= \left(\frac{1}{s} - \frac{2s}{t^2} \right) \cos(x + 2y) \\ z_{ss} &= \frac{2t}{s^3} \cos(x + 2y) - \left(\frac{2}{t} - \frac{t}{s^2} \right)^2 \sin(x + 2y) \end{aligned}$$

$$z_{st} = -\left(\frac{1}{s^2} + \frac{2}{t^2}\right) \cos(x+2y) - \left(\frac{1}{s} - \frac{2s}{t^2}\right) \left(\frac{2}{t} - \frac{t}{s^2}\right) \sin(x+2y)$$

$$z_{ts} = -\left(\frac{1}{s^2} + \frac{2}{t^2}\right) \cos(x+2y) - \left(\frac{1}{s} - \frac{2s}{t^2}\right) \left(\frac{2}{t} - \frac{t}{s^2}\right) \sin(x+2y)$$

$$z_{tt} = \frac{4s}{t^3} \cos(x+2y) - \left(\frac{1}{s} - \frac{2s}{t^2}\right)^2 \sin(x+2y)$$

演習問題 2.7 次の場合に $\frac{D(x,y)}{D(u,v)}$ 及び $\frac{D(u,v)}{D(x,y)}$ を求めよ。

(1) $x = v^2, y = u^2$

(2) $x = u^2 - v^2, y = 2uv$

(3) $x = u \cos v, y = u \sin v$

(4) $x = u, y = u + v$

$\frac{D(u,v)}{D(x,y)}$ を直接求めることは難しいので、最初に $\frac{D(x,y)}{D(u,v)}$ を求めて、逆行列を求めることにより、 $\frac{D(u,v)}{D(x,y)}$ を求める。

ヤコビ行列は変数の順序が変わると別のヤコビ行列になる。順序を間違えないこと。 $\frac{D(x,y)}{D(u,v)}$ でいうと、独立変数が左から右へ u, v 、従属変数は縦で上から下に x, y となる。

(1) $\frac{\partial x}{\partial u} = 0, \frac{\partial x}{\partial v} = 2v, \frac{\partial y}{\partial u} = 2u, \frac{\partial y}{\partial v} = 0$ なので

$$\frac{D(x,y)}{D(u,v)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2v \\ 2u & 0 \end{pmatrix}$$

となる。 $\frac{D(u,v)}{D(x,y)}$ は $\frac{D(x,y)}{D(u,v)}$ の逆行列なので

$$\frac{D(u,v)}{D(x,y)} = \left(\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 2v \\ 2u & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2u} \\ \frac{1}{2v} & 0 \end{pmatrix}$$

(2) $\frac{D(x,y)}{D(u,v)} = \begin{pmatrix} 2u & -2v \\ 2v & 2u \end{pmatrix}, \frac{D(u,v)}{D(x,y)} = \frac{1}{2(u^2+v^2)} \begin{pmatrix} u & v \\ -v & u \end{pmatrix}$

(3) $\frac{D(x,y)}{D(u,v)} = \begin{pmatrix} \cos v & -u \sin v \\ \sin v & u \cos v \end{pmatrix}, \frac{D(u,v)}{D(x,y)} = \begin{pmatrix} \cos v & \sin v \\ -\frac{\sin v}{u} & \frac{\cos v}{u} \end{pmatrix}$

(4) $\frac{D(x,y)}{D(u,v)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \frac{D(u,v)}{D(x,y)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

逆行列の求め方が分からない人(またはすぐ忘れる人)へ: $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ の逆行列は

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

で与えられた。これを忘れたときは次の様に定義に基づいて逆行列を計算して求めてもよい。

$A^{-1} = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$ とおくと, $AA^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ より p, q, r, s に関する連立 1 次方程式 (p, q, r, s が未知数で, a, b, c, d は既知数)

$$ap + br = 1, aq + bs = 0, cp + dr = 0, cq + ds = 1$$

を得る。これを解くと $p = \frac{d}{ad - bc}, q = \frac{-b}{ad - bc}, r = \frac{-c}{ad - bc}, d = \frac{a}{ad - bc}$ が分かる。

演習問題 2.8 次の関数に対し $\frac{\partial z}{\partial s}, \frac{\partial z}{\partial t}, \frac{\partial^2 z}{\partial s^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial s \partial t}$ を求めよ。

- | | |
|--|---|
| (1) $z = x + y^2, s = x + y, t = xy$ | (2) $z = x + y, s = x^2 + y^2, t = x^2 y^2$ |
| (3) $z = x + y, s = x^2 + y^2, t = xy$ | (4) $z = x + y, s = x^2 - y^2, t = 2xy$ |
| (5) $z = xy, s = x, t = x + y$ | (6) $z = xy, s = x \cos y, t = x \sin y$ |

スペース節約のため 2 次導関数は行列の形で表現しているが、行列で表現しなければいけないというわけでは勿論ない。

(1) $\frac{D(s, t)}{D(x, y)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ y & x \end{pmatrix}$ である。 $\frac{D(x, y)}{D(s, t)}$ は $\frac{D(x, y)}{D(s, t)}$ の逆行列なので

$$\frac{D(x, y)}{D(s, t)} = \begin{pmatrix} \frac{x}{x - y} & -\frac{1}{x - y} \\ -\frac{y}{x - y} & \frac{1}{x - y} \end{pmatrix}$$

となる。一方 $\frac{D(z)}{D(x, y)} = (1 \ 2y)$ であり, $\begin{pmatrix} \frac{\partial z}{\partial s} & \frac{\partial z}{\partial t} \end{pmatrix} = \frac{D(z)}{D(s, t)} = \frac{D(z)}{D(x, y)} \frac{D(x, y)}{D(s, t)}$ なので

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial z}{\partial s} & \frac{\partial z}{\partial t} \end{pmatrix} = \frac{D(z)}{D(s, t)} = \begin{pmatrix} \frac{x - 2y^2}{x - y} & \frac{-1 + 2y}{x - y} \end{pmatrix}$$

である。また

$$\frac{D(z_s, z_t)}{D(x, y)} = \begin{pmatrix} \frac{y(-1 + 2y)}{(x - y)^2} & -\frac{4xy - 2y^2 - x}{(x - y)^2} \\ -\frac{-1 + 2y}{(x - y)^2} & \frac{2x - 1}{(x - y)^2} \end{pmatrix}$$

が成立している。 $\begin{pmatrix} z_{ss} & z_{st} \\ z_{ts} & z_{tt} \end{pmatrix} = \frac{D(z_s, z_t)}{D(s, t)} = \frac{D(z_s, z_t)}{D(x, y)} \frac{D(x, y)}{D(s, t)}$ に代入して

$$\begin{pmatrix} z_{ss} & z_{st} \\ z_{ts} & z_{tt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2y(-x + 3xy - y^2)}{(x - y)^3} & -\frac{-x + 4xy - y}{(x - y)^3} \\ -\frac{-x + 4xy - y}{(x - y)^3} & \frac{2(-1 + y + x)}{(x - y)^3} \end{pmatrix}$$

を得る。

(2) $\frac{D(s, y)}{D(x, y)} = \begin{pmatrix} 2x & 2y \\ 2xy^2 & 2x^2y \end{pmatrix}$ である。 $\frac{D(x, y)}{D(s, t)}$ は $\frac{D(x, y)}{D(s, t)}$ の逆行列なので

$$\frac{D(x, y)}{D(s, t)} = \begin{pmatrix} \frac{x}{2(x^2 - y^2)} & -\frac{1}{2x(x^2 - y^2)} \\ -\frac{y}{2(x^2 - y^2)} & \frac{1}{2y(x^2 - y^2)} \end{pmatrix}$$

となる。一方 $\frac{D(z)}{D(x, y)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}$ であり、 $\begin{pmatrix} \frac{\partial z}{\partial s} & \frac{\partial z}{\partial t} \end{pmatrix} = \frac{D(z)}{D(s, t)} = \frac{D(z)}{D(x, y)} \frac{D(x, y)}{D(s, t)}$ なので

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial z}{\partial s} & \frac{\partial z}{\partial t} \end{pmatrix} = \frac{D(z)}{D(s, t)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2(x+y) & 2(x+y)xy \end{pmatrix}$$

である。また

$$\frac{D(z_s, z_t)}{D(x, y)} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2(x+y)^2} & -\frac{1}{2(x+y)^2} \\ -\frac{2x+y}{2(x+y)^2 x^2 y} & -\frac{2y+x}{2(x+y)^2 x y^2} \end{pmatrix}$$

が成立している。 $\begin{pmatrix} z_{ss} & z_{st} \\ z_{ts} & z_{tt} \end{pmatrix} = \frac{D(z_s, z_t)}{D(s, t)} = \frac{D(z_s, z_t)}{D(x, y)} \frac{D(x, y)}{D(s, t)}$ に代入して

$$\begin{pmatrix} z_{ss} & z_{st} \\ z_{ts} & z_{tt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4(x+y)^3} & -\frac{1}{4(x+y)^3 xy} \\ -\frac{1}{4(x+y)^3 xy} & -\frac{x^2 + 3xy + y^2}{4(x+y)^3 y^3 x^3} \end{pmatrix}$$

を得る。

(3) $\frac{D(s, y)}{D(x, y)} = \begin{pmatrix} 2x & 2y \\ y & x \end{pmatrix}$ である。 $\frac{D(x, y)}{D(s, t)}$ は $\frac{D(x, y)}{D(s, t)}$ の逆行列なので

$$\frac{D(x, y)}{D(s, t)} = \begin{pmatrix} \frac{x}{2(x^2 - y^2)} & -\frac{y}{x^2 - y^2} \\ -\frac{y}{2(x^2 - y^2)} & \frac{x}{x^2 - y^2} \end{pmatrix}$$

となる。一方 $\frac{D(z)}{D(x, y)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}$ であり、 $\begin{pmatrix} \frac{\partial z}{\partial s} & \frac{\partial z}{\partial t} \end{pmatrix} = \frac{D(z)}{D(s, t)} = \frac{D(z)}{D(x, y)} \frac{D(x, y)}{D(s, t)}$ なので

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial z}{\partial s} & \frac{\partial z}{\partial t} \end{pmatrix} = \frac{D(z)}{D(s, t)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2(x+y) & x+y \end{pmatrix}$$

である。また

$$\frac{D(z_s, z_t)}{D(x, y)} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2(x+y)^2} & -\frac{1}{2(x+y)^2} \\ -\frac{1}{(x+y)^2} & -\frac{1}{(x+y)^2} \end{pmatrix}$$

が成立している。 $\begin{pmatrix} z_{ss} & z_{st} \\ z_{ts} & z_{tt} \end{pmatrix} = \frac{D(z_s, z_t)}{D(s, t)} = \frac{D(z_s, z_t)}{D(x, y)} \frac{D(x, y)}{D(s, t)}$ に代入して

$$\begin{pmatrix} z_{ss} & z_{st} \\ z_{ts} & z_{tt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4(x+y)^3} & -\frac{1}{2(x+y)^3} \\ -\frac{1}{2(x+y)^3} & -\frac{1}{(x+y)^3} \end{pmatrix}$$

を得る。

$$(4) \frac{D(s, y)}{D(x, y)} = \begin{pmatrix} 2x & -2y \\ 2y & 2x \end{pmatrix} \text{である。} \frac{D(x, y)}{D(s, t)} \text{は} \frac{D(x, y)}{D(s, t)} \text{の逆行列なので}$$

$$\frac{D(x, y)}{D(s, t)} = \begin{pmatrix} \frac{x}{2(x^2 + y^2)} & \frac{y}{2(x^2 + y^2)} \\ -\frac{y}{2(x^2 + y^2)} & \frac{x}{2(x^2 + y^2)} \end{pmatrix}$$

となる。一方 $\frac{D(z)}{D(x, y)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}$ であり, $\left(\frac{\partial z}{\partial s} \quad \frac{\partial z}{\partial t} \right) = \frac{D(z)}{D(s, t)} = \frac{D(z)}{D(x, y)} \frac{D(x, y)}{D(s, t)}$ なので

$$\left(\frac{\partial z}{\partial s} \quad \frac{\partial z}{\partial t} \right) = \frac{D(z)}{D(s, t)} = \begin{pmatrix} \frac{x-y}{2(x^2 + y^2)} & \frac{x+y}{2(x^2 + y^2)} \end{pmatrix}$$

である。また

$$\frac{D(z_s, z_t)}{D(x, y)} = \begin{pmatrix} -\frac{x^2 - y^2 - 2xy}{2(x^2 + y^2)^2} & -\frac{x^2 - y^2 + 2xy}{2(x^2 + y^2)^2} \\ -\frac{x^2 - y^2 + 2xy}{2(x^2 + y^2)^2} & \frac{x^2 - y^2 - 2xy}{2(x^2 + y^2)^2} \end{pmatrix}$$

が成立している。 $\begin{pmatrix} z_{ss} & z_{st} \\ z_{ts} & z_{tt} \end{pmatrix} = \frac{D(z_s, z_t)}{D(s, t)} = \frac{D(z_s, z_t)}{D(x, y)} \frac{D(x, y)}{D(s, t)}$ に代入して

$$\begin{pmatrix} z_{ss} & z_{st} \\ z_{ts} & z_{tt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3x^2y + y^3 - 3xy^2 + x^3}{4(x^2 + y^2)^3} & -\frac{3x^2y - y^3 - 3xy^2 + x^3}{4(x^2 + y^2)^3} \\ -\frac{3x^2y - y^3 - 3xy^2 + x^3}{4(x^2 + y^2)^3} & \frac{3x^2y + y^3 - 3xy^2 + x^3}{4(x^2 + y^2)^3} \end{pmatrix}$$

を得る。

$$(5) \frac{D(s, y)}{D(x, y)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{である。} \frac{D(x, y)}{D(s, t)} \text{は} \frac{D(x, y)}{D(s, t)} \text{の逆行列なので}$$

$$\frac{D(x, y)}{D(s, t)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

となる。一方 $\frac{D(z)}{D(x, y)} = \begin{pmatrix} y & x \end{pmatrix}$ であり, $\left(\frac{\partial z}{\partial s} \quad \frac{\partial z}{\partial t} \right) = \frac{D(z)}{D(s, t)} = \frac{D(z)}{D(x, y)} \frac{D(x, y)}{D(s, t)}$ なので

$$\left(\frac{\partial z}{\partial s} \quad \frac{\partial z}{\partial t} \right) = \frac{D(z)}{D(s, t)} = \begin{pmatrix} y-x & x \end{pmatrix}$$

である。また

$$\frac{D(z_s, z_t)}{D(x, y)} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

が成立している。 $\begin{pmatrix} z_{ss} & z_{st} \\ z_{ts} & z_{tt} \end{pmatrix} = \frac{D(z_s, z_t)}{D(s, t)} = \frac{D(z_s, z_t)}{D(x, y)} \frac{D(x, y)}{D(s, t)}$ に代入して

$$\begin{pmatrix} z_{ss} & z_{st} \\ z_{ts} & z_{tt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

を得る。

$$(6) \quad \frac{D(s, y)}{D(x, y)} = \begin{pmatrix} \cos y & -x \sin y \\ \sin y & x \cos y \end{pmatrix} \text{である。} \quad \frac{D(x, y)}{D(s, t)} \text{は} \quad \frac{D(x, y)}{D(s, t)} \text{の逆行列なので}$$

$$\frac{D(x, y)}{D(s, t)} = \begin{pmatrix} \cos y & \sin y \\ -\frac{\sin y}{x} & \frac{\cos y}{x} \end{pmatrix}$$

となる。一方 $\frac{D(z)}{D(x, y)} = \begin{pmatrix} y & x \end{pmatrix}$ であり、 $\left(\frac{\partial z}{\partial s} \quad \frac{\partial z}{\partial t} \right) = \frac{D(z)}{D(s, t)} = \frac{D(z)}{D(x, y)} \frac{D(x, y)}{D(s, t)}$ なので

$$\left(\frac{\partial z}{\partial s} \quad \frac{\partial z}{\partial t} \right) = \frac{D(z)}{D(s, t)} = \begin{pmatrix} y \cos y - \sin y & y \sin y + \cos y \end{pmatrix}$$

である。また

$$\frac{D(z_s, z_t)}{D(x, y)} = \begin{pmatrix} 0 & -y \sin y \\ 0 & y \cos y \end{pmatrix}$$

が成立している。 $\begin{pmatrix} z_{ss} & z_{st} \\ z_{ts} & z_{tt} \end{pmatrix} = \frac{D(z_s, z_t)}{D(s, t)} = \frac{D(z_s, z_t)}{D(x, y)} \frac{D(x, y)}{D(s, t)}$ に代入して

$$\begin{pmatrix} z_{ss} & z_{st} \\ z_{ts} & z_{tt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{y \sin^2 y}{x} & -\frac{y \sin y \cos y}{x} \\ -\frac{y \sin y \cos y}{x} & \frac{y \cos^2 y}{x} \end{pmatrix}$$

を得る。

演習問題 2.9 $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$ とする (2次元の極座標表示)。ヤコビ行列 $\frac{D(x, y)}{D(r, \theta)}$ および

ヤコビアン $\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)}$ を計算し、関数 $z = f(x, y)$ に対し次を示せ。

$$(1) \quad \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^2 = \left(\frac{\partial z}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial z}{\partial \theta} \right)^2$$

$$(2) \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2}$$

$$\text{ヤコビ行列は} \quad \frac{D(x, y)}{D(r, \theta)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix} \text{である。} \quad \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} = \det \frac{D(x, y)}{D(r, \theta)}$$

なので

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} = \cos \theta \times r \cos \theta - (-r \sin \theta) \times \sin \theta = r (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = r$$

である。

$$(1) \quad \frac{\partial z}{\partial r} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r}, \quad \frac{\partial z}{\partial \theta} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \theta} \text{なので}$$

$$\frac{\partial z}{\partial r} = \frac{\partial z}{\partial x} \cos \theta + \frac{\partial z}{\partial y} \sin \theta, \quad \frac{\partial z}{\partial \theta} = -\frac{\partial z}{\partial x} r \sin \theta + \frac{\partial z}{\partial y} r \cos \theta \quad (1)$$

となる。よって

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2 &= \left(\frac{\partial z}{\partial x} \cos \theta + \frac{\partial z}{\partial y} \sin \theta\right)^2 + \left(-\frac{\partial z}{\partial x} \sin \theta + \frac{\partial z}{\partial y} \cos \theta\right)^2 \\
&= \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 \cos^2 \theta + 2 \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y} \cos \theta \sin \theta + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 \sin^2 \theta \\
&\quad + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 \sin^2 \theta - 2 \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y} \cos \theta \sin \theta + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 \cos^2 \theta \\
&= \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2
\end{aligned}$$

となる。

(2) 式 (1) より

$$\frac{\partial^2 z}{\partial r^2} = \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right) = \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \cos \theta + \frac{\partial z}{\partial y} \sin \theta\right) = \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) \cos \theta + \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) \sin \theta$$

となるが,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) \frac{\partial y}{\partial r} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \cos \theta + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \sin \theta \\
\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) \frac{\partial y}{\partial r} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \cos \theta + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \sin \theta
\end{aligned}$$

を代入して

$$\frac{\partial^2 z}{\partial r^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \cos^2 \theta + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \cos \theta \sin \theta + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \sin^2 \theta$$

を得る。計算の途中で $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ を使った。

同様に式 (1) より

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2} &= \frac{\partial}{\partial \theta} \left(-\frac{\partial z}{\partial x} r \sin \theta + \frac{\partial z}{\partial y} r \cos \theta\right) \\
&= -\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) r \sin \theta - \frac{\partial z}{\partial x} r \cos \theta + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) r \cos \theta - \frac{\partial z}{\partial y} r \sin \theta
\end{aligned}$$

となるが,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) \frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) \frac{\partial y}{\partial \theta} = -\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} r \sin \theta + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} r \cos \theta \\
\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) \frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) \frac{\partial y}{\partial \theta} = -\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} r \sin \theta + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} r \cos \theta
\end{aligned}$$

を代入して

$$\frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} r^2 \sin^2 \theta - 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} r^2 \sin \theta \cos \theta + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} r^2 \cos^2 \theta - \frac{\partial z}{\partial x} r \cos \theta - \frac{\partial z}{\partial y} r \sin \theta$$

を得る。よって

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2} &= \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) - \frac{1}{r} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \cos \theta + \frac{\partial z}{\partial y} \sin \theta \right) \\ &= \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial z}{\partial r}\end{aligned}$$

を得る。

演習問題 2.10

(1) $x = u \cos \alpha - v \sin \alpha$, $y = u \sin \alpha + v \cos \alpha$ (α は定数) のとき次を示せ。

$$1) z_x^2 + z_y^2 = z_u^2 + z_v^2$$

$$2) z_{xx} + z_{yy} = z_{uu} + z_{vv}$$

(2) $x + y = e^{u+v}$, $x - y = e^{u-v}$ に対し $z_{xx} - z_{yy} = e^{-2u}(z_{uu} - z_{vv})$ が成立することを示せ。

(3) $x + y = u$, $y = uv$ ならば $xz_{xx} + yz_{xy} + z_x = uz_{uu} - vz_{uv} + z_u$ となる事を示せ。

(1) x を u で微分すると $x_u = \cos \alpha$, v で微分すると $x_v = -\sin \alpha$ を得る。同様に $y_u = \sin \alpha$, $y_v = \cos \alpha$ となる。合成関数の微分法より

$$z_u = z_x x_u + z_y y_u$$

$$z_v = z_x x_v + z_y y_v$$

が得られる。これを用いて $z_u^2 + z_v^2$ を計算すると

$$\begin{aligned}z_u^2 + z_v^2 &= (z_x \cos \alpha - z_y \sin \alpha)^2 + (z_x \sin \alpha + z_y \cos \alpha)^2 \\ &= z_x^2 \cos^2 \alpha - 2z_x z_y \cos \alpha \sin \alpha + z_y^2 \sin^2 \alpha + z_x^2 \sin^2 \alpha + 2z_x z_y \sin \alpha \cos \alpha + z_y^2 \cos^2 \alpha \\ &= z_x^2 (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) + z_y^2 (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) \\ &= z_x^2 + z_y^2\end{aligned}$$

となる。

$z_u = z_x x_u + z_y y_u$ を u で微分すると、積の微分法より

$$(z_u)_u = (z_x)_u x_u + z_x (x_u)_u + (z_y)_u y_u + z_y (y_u)_u$$

となる。 x_u, y_u は定数なので $(x_u)_u = 0, (y_u)_u = 0$ である。また $(z_x)_u, (z_y)_u$ に合成関数の微分法をもう一度適用すると、 $(z_x)_u = (z_x)_x x_u + (z_x)_y y_u, (z_y)_u = (z_y)_x x_u + (z_y)_y y_u$ となる。よってこれらを前式に代入すると

$$z_{uu} = z_{xx} x_u^2 + 2z_{xy} x_u y_u + z_{yy} y_u^2 = z_{xx} \cos^2 \alpha + 2z_{xy} \cos \alpha \sin \alpha + z_{yy} \sin^2 \alpha$$

が得られる。ただし計算途中で $z_{xy} = z_{yx}$ を使用した。同様に z_{vv} を計算すると

$$z_{vv} = z_{xx} \sin^2 \alpha - 2z_{xy} \cos \alpha \sin \alpha + z_{yy} \cos^2 \alpha$$

となり、これらを加えると

$$z_{uu} + z_{vv} = z_{xx} (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) + z_{yy} (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) = z_{xx} + z_{yy}$$

となる。

$$(2) \quad x = \frac{e^{u+v} + e^{u-v}}{2}, y = \frac{e^{u+v} - e^{u-v}}{2} \text{ なので}$$

$$\frac{D(x, y)}{D(u, v)} = \begin{pmatrix} x & y \\ y & x \end{pmatrix}$$

となる。

$$z_u = z_x x_u + z_y y_u = z_x x + z_y y$$

を u で微分すると

$$\begin{aligned} z_{uu} &= \frac{\partial}{\partial u} (z_x x) + \frac{\partial}{\partial u} (z_y y) \\ &= (z_x)_u x + z_x x_u + (z_y)_u y + z_y y_u \\ &= (z_{xx} x_u + z_{xy} y_u) x + z_x x + (z_{yx} x_u + z_{yy} y_u) y + z_y y \\ &= z_{xx} x^2 + 2z_{xy} xy + z_{yy} y^2 + z_x x + z_y y \end{aligned}$$

となる。

$$z_v = z_x x_v + z_y y_v = z_x y + z_y x$$

を v で微分すると

$$\begin{aligned} z_{vv} &= (z_x)_v y + z_x y_v + (z_y)_v x + z_y x_v \\ &= (z_{xx} x_v + z_{xy} y_v) y + z_x x + (z_{yx} x_v + z_{yy} y_v) x + z_y y \\ &= z_{xx} y^2 + 2z_{xy} xy + z_{yy} x^2 + z_x x + z_y y \end{aligned}$$

となる。よって $z_{uu} - z_{vv} = (z_{xx} - z_{yy})(x^2 - y^2)$ となるが³, $x^2 - y^2 = e^{2u}$ なので式が証明された。

(3) $x = u - y = u - uv$ なので

$$\frac{D(x, y)}{D(u, v)} = \begin{pmatrix} 1-v & -u \\ v & u \end{pmatrix}$$

である。

$$z_u = z_x x_u + z_y y_u = z_x(1-v) + z_y v$$

を u で微分すると

$$\begin{aligned} z_{uu} &= (z_x)_u(1-v) + (z_y)_u v \\ &= (z_{xx} x_u + z_{xy} y_u)(1-v) + (z_{yx} x_u + z_{yy} y_u) v \\ &= z_{xx}(1-v)^2 + 2z_{xy} u(1-v) + z_{yy} v^2 \end{aligned}$$

であり, z_u を v で微分すると

$$\begin{aligned} z_{uv} &= (z_x)_v(1-v) + z_x(1-v)_v + (z_y)_v v + z_y v_v \\ &= (z_{xx} x_v + z_{xy} y_v)(1-v) - z_x + (z_{yx} x_v + z_{yy} y_v) v + z_y \\ &= -z_{xx} u(1-v) + z_{xy} u(1-v) - z_{xy} uv + z_{yy} uv - z_x + z_y \end{aligned}$$

となる。よって

$$\begin{aligned}
 uz_{uu} - vz_{uv} + z_u &= z_{xx}u(1-v)^2 + 2z_{xy}uv(1-v) + z_{yy}uv^2 + z_{xx}uv(1-v) - z_{xy}uv(1-v) \\
 &\quad + z_{xy}uv^2 - z_{yy}uv^2 + z_xv - z_yv + z_x(1-v) + z_yv \\
 &= z_{xx}u(1-v) + z_{xy}uv + z_x \\
 &= xz_{xx} + yz_{yy} + z_x
 \end{aligned}$$

が得られる。

演習問題 2.11 次の関数の偏導関数を求めよ。

$$\begin{array}{ll}
 (1) w = f(x, y, z) = x^2y^3z^4 & (2) w = xyz \sin(x^2 + y^2 + z^2) \\
 (3) e^{x^2+y^3+z^4} & (4) x^2y^3 \log(x^2 + y^3 + z^4)
 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 (1) \quad \frac{\partial w}{\partial x} &= 2xy^3z^4, \quad \frac{\partial w}{\partial y} = 3x^2y^2z^4, \quad \frac{\partial w}{\partial z} = 4x^2y^3z^3 \\
 (2) \quad \frac{\partial w}{\partial x} &= yz \sin(x^2 + y^2 + z^2) + 2x^2yz \cos(x^2 + y^2 + z^2), \\
 \frac{\partial w}{\partial y} &= xz \sin(x^2 + y^2 + z^2) + 2xy^2z \cos(x^2 + y^2 + z^2), \\
 \frac{\partial w}{\partial z} &= xy \sin(x^2 + y^2 + z^2) + 2xyz^2 \cos(x^2 + y^2 + z^2) \\
 (3) \quad \frac{\partial w}{\partial x} &= 2xe^{x^2+y^3+z^4}, \quad \frac{\partial w}{\partial y} = 3y^2e^{x^2+y^3+z^4}, \quad \frac{\partial w}{\partial z} = 4z^3e^{x^2+y^3+z^4} \\
 (4) \quad \frac{\partial w}{\partial x} &= 2xy^3 \log(x^2 + y^3 + z^4) + \frac{2x^3y^2}{x^2 + y^3 + z^4}, \\
 \frac{\partial w}{\partial y} &= 3x^2y^2 \log(x^2 + y^3 + z^4) + \frac{3x^2y^5}{x^2 + y^3 + z^4}, \\
 \frac{\partial w}{\partial z} &= \frac{4x^2y^3z^3}{x^2 + y^3 + z^4}
 \end{aligned}$$

演習問題 2.12 次の場合に $\frac{D(x, y, z)}{D(u, v, w)}$ 及び $\frac{D(u, v, w)}{D(x, y, z)}$ を求めよ。

$$\begin{array}{ll}
 (1) x = v^2, y = w^2, z = u^2 & (2) x = u^2 - v^2 + w^2, y = 2uv, z = 2uw \\
 (3) x = u \cos v, y = u \sin v, z = u + w & (4) x = u, y = u + v, z = u + v + w
 \end{array}$$

(1)

$$\frac{D(x, y, z)}{D(u, v, w)} = \begin{pmatrix} x_u & x_v & x_w \\ y_u & y_v & y_w \\ z_u & z_v & z_w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2v & 0 \\ 0 & 0 & 2w \\ 2u & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(1)のみ逆行列を求める計算を記す。ここでは線型代数の知識はないとして直接計算で求めている。線型代数において学んだ逆行列の求め方を知っているものは勿論それを用いて計算してよい。

逆行列を $B = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ とおくと

$$\begin{pmatrix} 0 & 2v & 0 \\ 0 & 0 & 2w \\ 2u & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

となるので, $a, b, c, d, e, f, g, h, i$ は連立 1 次方程式

$$2vd = 1, 2ve = 0, 2vf = 0, 2wg = 0, 2wh = 1, 2wi = 0, 2ua = 0, 2ub = 0, 2uc = 1$$

の解なので, 連立 1 次方程式を解くと

$$a = 0, b = 0, c = \frac{1}{2u}, d = \frac{1}{2v}, e = 0, f = 0, g = 0, h = \frac{1}{2w}, i = 0$$

が得られる (ここで $u \neq 0, v \neq 0, w \neq 0$ として計算した)。よって

$$\frac{D(u, v, w)}{D(x, y, z)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2u} \\ \frac{1}{2v} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2w} & 0 \end{pmatrix}$$

である。

(2)

$$\frac{D(x, y, z)}{D(u, v, w)} = \begin{pmatrix} x_u & x_v & x_w \\ y_u & y_v & y_w \\ z_u & z_v & z_w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2u & -2v & 2w \\ 2v & 2u & 0 \\ 2w & 0 & 2u \end{pmatrix}$$

なので

$$\frac{D(u, v, w)}{D(x, y, z)} = \begin{pmatrix} \frac{u}{2(u^2 + v^2 - w^2)} & \frac{v}{2(u^2 + v^2 - w^2)} & -\frac{w}{2(u^2 + v^2 - w^2)} \\ -\frac{v}{2(u^2 + v^2 - w^2)} & \frac{u^2 - w^2}{2u(u^2 + v^2 - w^2)} & -\frac{vw}{2u(u^2 + v^2 - w^2)} \\ -\frac{w}{2(u^2 + v^2 - w^2)} & -\frac{vw}{2u(u^2 + v^2 - w^2)} & \frac{u^2 + v^2}{2u(u^2 + v^2 - w^2)} \end{pmatrix}$$

である。

(3)

$$\frac{D(x, y, z)}{D(u, v, w)} = \begin{pmatrix} x_u & x_v & x_w \\ y_u & y_v & y_w \\ z_u & z_v & z_w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos v & -u \sin v & 0 \\ \sin v & u \cos v & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

なので

$$\frac{D(u, v, w)}{D(x, y, z)} = \begin{pmatrix} \cos v & \sin v & 0 \\ -\frac{\sin v}{u} & \frac{\cos v}{u} & 0 \\ -\cos v & -\sin v & 1 \end{pmatrix}$$

である。

(4)

$$\frac{D(x, y, z)}{D(u, v, w)} = \begin{pmatrix} x_u & x_v & x_w \\ y_u & y_v & y_w \\ z_u & z_v & z_w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

なので

$$\frac{D(u, v, w)}{D(x, y, z)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

である。

演習問題 2.13 次の関数に対し $\frac{\partial w}{\partial s}, \frac{\partial w}{\partial t}, \frac{\partial w}{\partial u}, \frac{\partial^2 w}{\partial s^2}, \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \frac{\partial^2 w}{\partial u^2}, \frac{\partial^2 w}{\partial s \partial t}$ を求めよ。

(1) $w = x^3 + y^3 + z^3, x + y + z = s, xy + yz + zx = t, xyz = u$

(2) $w = x + y + z, x^2 + y^2 + z^2 = s, xyz = t, xy + yz + zx = u$

(1)

$$\frac{D(s, t, u)}{D(x, y, z)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial s}{\partial x} & \frac{\partial s}{\partial y} & \frac{\partial s}{\partial z} \\ \frac{\partial t}{\partial x} & \frac{\partial t}{\partial y} & \frac{\partial t}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ y + z & z + x & x + y \\ yz & zx & xy \end{pmatrix}$$

なので

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial x}{\partial u} \\ \frac{\partial y}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial t} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial z}{\partial s} & \frac{\partial z}{\partial t} & \frac{\partial z}{\partial u} \end{pmatrix} = \frac{D(x, y, z)}{D(s, t, u)} = \left(\frac{D(s, t, u)}{D(x, y, z)} \right)^{-1} \\ = \begin{pmatrix} \frac{x^2}{(x-y)(x-z)} & -\frac{x}{(x-y)(x-z)} & \frac{1}{(x-y)(x-z)} \\ \frac{y^2}{(y-z)(y-x)} & -\frac{y}{(y-z)(y-x)} & \frac{1}{(y-z)(y-x)} \\ \frac{z^2}{(z-x)(z-y)} & -\frac{z}{(z-x)(z-y)} & \frac{1}{(z-x)(z-y)} \end{pmatrix}$$

となる。

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 3x^2, \quad \frac{\partial w}{\partial y} = 3y^2, \quad \frac{\partial w}{\partial z} = 3z^2$$

なので

$$\begin{aligned}\frac{\partial w}{\partial s} &= \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial s} \\ &= 3x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 3xy + 3zx + 3yz \\ \frac{\partial w}{\partial t} &= \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial t} \\ &= -3x - 3y - 3z \\ \frac{\partial w}{\partial u} &= \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial u} \\ &= 3\end{aligned}$$

となる。 $X = \frac{\partial w}{\partial s}$ とおき、これに合成関数の微分法を適用すると

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 w}{\partial s^2} &= \frac{\partial X}{\partial s} = \frac{\partial X}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial X}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial X}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial s} \\ &= 6x + 6y + 6z\end{aligned}$$

が得られる。同様に計算して

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 w}{\partial s \partial t} &= \frac{\partial w_t}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial w_t}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial w_t}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial s} \\ &= -3 \\ \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= \frac{\partial w_t}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial w_t}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial w_t}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial t} \\ &= 0 \\ \frac{\partial^2 w}{\partial u^2} &= \frac{\partial w_u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial w_u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial w_u}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial u} \\ &= 0\end{aligned}$$

(2) この問題は x, y, z に関する対称式 (x, y, z を入れ換えても式が変わらない) に関係しているので、変数間に特殊な関係が存在する。ここではそのことを使って解く方法を紹介する。勿論 (1) と同様に方法で解いてもよい。

$$\begin{aligned}w^2 &= (x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + zx) \\ &= s + 2u\end{aligned}$$

が成立している。両辺を s で微分すると、

$$\frac{\partial w^2}{\partial s} = \frac{\partial s}{\partial s} + 2 \frac{\partial u}{\partial s}$$

となる。 s で微分するとき t, u は固定されているので

$$\frac{\partial u}{\partial s} = 0, \quad \frac{\partial s}{\partial s} = 1$$

である。 $\frac{\partial w^2}{\partial s} = 2w \frac{\partial w}{\partial s}$ なので $2w \frac{\partial w}{\partial s} = 1$ より

$$\frac{\partial w}{\partial s} = \frac{1}{2w} = \frac{1}{2(x+y+z)}$$

となる。 $w^2 = s + 2u$ を t で微分すると

$$\frac{\partial w^2}{\partial t} = \frac{\partial s}{\partial t} + 2 \frac{\partial u}{\partial t}$$

となる。 $\frac{\partial s}{\partial t} = 0$, $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$ より

$$\frac{\partial w}{\partial t} = 0$$

となる。 $w^2 = s + 2u$ を u で微分すると,

$$\frac{\partial w^2}{\partial u} = \frac{\partial s}{\partial u} + 2 \frac{\partial u}{\partial u}$$

となる。 $\frac{\partial s}{\partial u} = 0$, $\frac{\partial u}{\partial u} = 1$ である。 $\frac{\partial w^2}{\partial u} = 2w \frac{\partial w}{\partial u}$ なので

$$\frac{\partial w}{\partial u} = \frac{1}{w} = \frac{1}{x+y+z}$$

となる。

$2ww_s = 1$ の両辺を s で微分すると $2w_s w_s + 2w w_{ss} = 0$ を得るので

$$\begin{aligned} w_{ss} &= -\frac{w_s^2}{w} = -\frac{1}{w} \left(\frac{1}{2w} \right)^2 \\ &= -\frac{1}{4(x+y+z)^3} \end{aligned}$$

$w_t = 0$ なので $w_{tt} = 0$, $w_{ts} = 0$ である。また $ww_u = 1$ の両辺を u で微分すると $w_u w_u + w w_{uu} = 0$ を得るので,

$$\begin{aligned} w_{uu} &= -\frac{w_u^2}{w} = -\frac{1}{w} \left(\frac{1}{w} \right)^2 \\ &= -\frac{1}{(x+y+z)^3} \end{aligned}$$

となる。

(1) の問題もここで紹介した方法を用いて計算できる。興味のあるものは試みよ。

演習問題 2.14 $x = r \sin \theta \cos \varphi$, $y = r \sin \theta \sin \varphi$, $z = r \cos \theta$ とする (3次元の極座標表示)。関数 $w = f(x, y, z)$ に対し次を示せ。

(1) ヤコビアン $\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, \varphi)}$ を計算せよ。

$$(2) \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 = \left(\frac{\partial w}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right)^2 + \left(\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial w}{\partial \varphi} \right)^2$$

$$(3) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial w}{\partial \varphi}$$

3次行列 $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ に対しその行列式は

$$\det A = aei + dhc + gbf - gec - dbi - ahf$$

であるということは知っているとする。

(1)

$$\frac{D(x, y, z)}{D(r, \theta, \varphi)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \varphi & r \cos \theta \cos \varphi & -r \sin \theta \sin \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi & r \cos \theta \sin \varphi & r \sin \theta \cos \varphi \\ \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \end{pmatrix}$$

なので

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, \varphi)} = \det \begin{pmatrix} D(x, y, z) \\ D(r, \theta, \varphi) \end{pmatrix} = r^2 \sin \theta$$

となる。

(2)

$$\frac{D(w)}{D(r, \theta, \varphi)} = \frac{D(w)}{D(x, y, z)} \frac{D(x, y, z)}{D(r, \theta, \varphi)}$$

なので

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial r} &= \frac{\partial w}{\partial x} \sin \theta \cos \varphi + \frac{\partial w}{\partial y} \sin \theta \sin \varphi + \frac{\partial w}{\partial z} \cos \theta \\ \frac{\partial w}{\partial \theta} &= \frac{\partial w}{\partial x} r \cos \theta \cos \varphi + \frac{\partial w}{\partial y} r \cos \theta \sin \varphi - \frac{\partial w}{\partial z} r \sin \theta \\ \frac{\partial w}{\partial \varphi} &= -\frac{\partial w}{\partial x} r \sin \theta \sin \varphi + \frac{\partial w}{\partial y} r \sin \theta \cos \varphi \end{aligned}$$

となる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial r} &= \frac{\partial w}{\partial x} \sin \theta \cos \varphi + \frac{\partial w}{\partial y} \sin \theta \sin \varphi + \frac{\partial w}{\partial z} \cos \theta \\ \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} &= \frac{\partial w}{\partial x} \cos \theta \cos \varphi + \frac{\partial w}{\partial y} \cos \theta \sin \varphi - \frac{\partial w}{\partial z} \sin \theta \\ \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial w}{\partial \varphi} &= -\frac{\partial w}{\partial x} \sin \varphi + \frac{\partial w}{\partial y} \cos \varphi \end{aligned}$$

となるので、各式を2乗して加えると

$$\left(\frac{\partial w}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right)^2 + \left(\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial w}{\partial \varphi} \right)^2 = \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2$$

が成立する。

(3) $w_r = w_x x_r + w_y y_r + w_z z_r$ を r で微分して

$$\begin{aligned}w_{rr} &= (w_x)_r x_r + w_x x_{rr} + (w_y)_r y_r + w_y y_{rr} + (w_z)_r z_r + w_z z_{rr} \\ &= (w_{xx} x_r + w_{xy} y_r + w_{xz} z_r) x_r + w_x x_{rr} + (w_{yx} x_r + w_{yy} y_r + w_{yz} z_r) y_r \\ &\quad + w_y y_{rr} + (w_{zx} x_r + w_{zy} y_r + w_{zz} z_r) z_r + w_z z_{rr} \\ &= w_{xx} x_r^2 + w_{yy} y_r^2 + w_{zz} z_r^2 + 2w_{xy} x_r y_r + 2w_{yz} y_r z_r + 2w_{xz} x_r z_r + w_x x_{rr} + w_y y_{rr} + w_z z_{rr}\end{aligned}$$

を得る。同様に $w_{\varphi\varphi}, (\sin\theta w_\theta)_\theta$ を計算し, $w_{rr} + \frac{2}{r} w_r + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} + (\sin\theta w_\theta)_\theta + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} w_{\varphi\varphi}$ の計算を実行すると求める式が得られる。